Digitized by Google

1817
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

. M55

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN

15/- Perfect

Ap 73-76 loose

G
3
. M

GEOMETRIA
SPECIOSA.

GEOMETRIA

SPECIOSA.

Digitized by Google

AD MAIOREM DEI GLORIAM

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA

PRIMVM

De poteſtatibus, à radice binomia, & reſidua.

SECVNDVM

De innumerabilibus numeroſis progreſsionibus.

TERTIVM

De quaſi proportionibus.

QVARTVM

De rationibus logarithmicis.

QVINTVM

De proprijs rationum logarithmis.

SEXTVM

De innumerabilibus quadraturis.

Pietro

PETRI MENGOLI

I. V. Ph. D. Coll. Patr. Bonon. Archigymn. Mechanici.

BONONIÆ, Typis Io. Baptiſtæ Ferronij 1659.

Superiorum permiſſu.

AD MAIOREM DEI GLORIAM

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA

[illegible]RIMVM

De poteſtati[illegible] radice binomia, & reſidua.

[illegible]VNDVM

De [illegible] nume[illegible] progreſsionibus.

[illegible]RTI[illegible]

[illegible] pro[illegible]bus.

[illegible]AR[illegible]

[illegible]us[illegible]nicis.

[illegible]I[illegible]

[illegible]garithmis.

[illegible]adraturis.

[illegible] N G O L I

[illegible]

[illegible]aptiſtæ Ferronij [illegible]

Vidit Ouidius Montalbanus Philoſophus Moralis, Mathematicus, & Iuriſta: & vndequaq; ſpecioſa, & digniſſima luce publica inuenit hæc Elementa, &c. Pro Reuerendiſs. P. Inquiſit. Bonon.

Vidit D. Inuentius Tortus Cler. Reg. S. Pauli, Pœnit. pro Illuſtriſs. & Reuerendiſs. D. D. Hieronymo Boncompagno Archiep. Bonon. & Princ.

Imprimatur.

Fr. Gulielmus Fochus Inquiſitor Bonon.



REGESTVM.

a b c d e f g h i k A B C D E F G H I K L M N O P Q R S T V X Y Z. Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Kk Ll Mm Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Vu Xx Yy Zz. Aaa Bbb Ccc.

Omnes ſunt duerniones, præter k, quæ eſt ternio, & c, quæ eſt ſemiſol.

Hist. of Sci. Heffer 1-18-27 14049

Ampliſsimo, & Integerrimo Viro D. FERDINANDO RIARIO,

Marchioni Caſtilionis Orciæ, Patritio Veneto, Senatori Bononienſi, Antiquiori, & Benemerito Patri Patriæ: PETRVS MENGOLVS Fęlicitatem.

NEque Speciosæ Geometrię pulchritudini, neque tui Nominis claritati, quidquam appoſitum exiſtimo, Vir Ampliſsime; quòd iſtud, in illius fronte præfulgeat. Ipſæ ſatis amabiles litterarum cultoribus viſæ ſunt, vtraque Geometria, Archimedis antiqua, & Indiuiſibilium noua Bonauenturæ Cauallerij Præceptoris mei, necnon & Viettæ Algebra: quarum, non ex confuſione, aut mixtione, ſed con-

1-16-40 Mem.

iunctis perfectionibus, noua quædam,& propria laboris noſtri ſpecies, nemini poterit diſplicere. Tuæ verò ſplẽdor gloriæ, Mathematicas quantaſcunque longè prætergreditur lucubrationes: & quacunque versùm prudentia regit fortunam, præclariſſimos diffundit radios; tuaque domeſtica ſinceræ inſinuat virtutis exempla. Inter quæ, ſingulare illud, ad bonas artes promouendas, tuæ officium eſt prouidentiæ; ſua cuique ſtudia conſilio partiri, munificentia inſtruere, augere fauoribus, & auctoritate ad Magiſterij decus, & perfectionem perducere. Id quod ego expertus hucuſque ſum ab adoleſcẽtia, tuæ

Digitized by Google

alumnus protectionis. Nam te ſuaſore primùm, deinde (poſt Caualle-rium defunctum) etiam præceptore, ſcholaſticus Mathematicus; te Vexillifero, profeſſor publicus Arithmetices, ante lauream; & poſt lauream, te noſtri Archigymnaſij moderatore, ad nouam vſque cathedrã Mechanicarum euectus: litterariam dignitatem, & fortunas omnes, tuis debeo beneficijs. Hanc itaque meam Geometriam, grati erga te animi perpetuum ſtatuo monimentum: tuorumque in me munerum aliqualem cenſum, in illius oblatione repẽdo. Fęliciori longè ſucceſſu, quàm cum alijs plerũque ſcriptoribus con-

tingit,

tingit, ſurdis vota numinibus nuncupare: tabellaſque appendere; quarum dij ſui ne quidem titulos intelligant. Tibi vni, me ipſum totum, voluntate pariter, & intellectu deditum, creditumque deuincio: qui ſi forte ſtudijs Geometriæ quidquam adiecero, propoſito conueniens titulo, nouum videlicet, atque ſpecioſum; tuam poſtulo, & expecto, noſtrorum elementorum, benigna in ſuſceptione, ſententiam. Vale. Bononiæ IX. Kal. Ianuarias MDCLX.

Lectori Elementario.

Tibi hunc librum ſcripſi, Lector, & Scholaris beneuole: ideoque nihil alienum ſumpſi, præterquam ex prioribus nouem Elementis Euclidis. Vt huius libri beneficio vtaris, tradam breuiter, ſex faciliora quædam mathemata, ſingula pro ſingulis elementis, per quæ poſſis, lectos quoſque titulos propoſitionum, numeroſis exemplis confirmare, noſtraſque demonſtrationes, arithmeticæ artis certitudine, præuenire.

Caput Primum.

Primum eſt, pro primo elemento: conſtructio poteſtatum cuiuslibet numeri binomij, vel reſidui. Eſt autem cuiuſque numeri prima poteſtas, ipſe numerus: ſecunda verò, eſt eiuſdem numeri per ſe ipſum multiplicationis productus, quæ dicitur, quadratus: tertia, eſt productus primæ poteſtatis in ſecundam, quæ dicitur, cubus: quarta, eſt productus primæ poteſtatis in tertiam, quæ dicitur, quadroquadratus: quinta, eſt productus primæ poteſtatis in quartam: & ſic deinceps in infinitum.

Poteſtates numerorum, vſque ad decimam, & vſque ad poteſtates denarij, ſequens exhibet tabella.

Numerorum Poteſtates.

Prima	*Secunda*	*Tertia*	*Quarta*	*Quinta*
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049
10	100	1000	10000	100000

Numerorum Poteſtates.

	Sexta	*Septima*	*Octaua*
2	64	128	256
3	729	2187	6561
4	4096	16384	65536
5	15625	78125	390625
7	46656	279936	1679616
7	117649	823543	5764801
8	262144	2097152	16777216
9	531441	4782969	43046721
10	1000000	10000000	100000000

	Nona	*Decima*
2	512	1024
3	19683	59049
4	262144	1048576
5	1953125	9765625
6	10077696	60466176
7	40353607	282475249
8	134217728	1073741824
9	387420489	3486784401
10	1000000000	10000000000

Porrò cum Franciſco Viettæ, alijſque placuerit Analyſtis, indeterminatum quemque determinabilem numerum, ciuſque priorem poteſtatem, cuiuſpiam ſimplicis litteræ charactere ſignificare: placuit conſequenter, indeterminatas determinabiles eiuſdem numeri poteſtates alias, eiuſdem litteræ charactere ſignificare, numeris dextrorſum adſcriptis, indicantibus, quota quæque ſit poteſtas. vt exempli gratia, cum indeterminati numeri determinabilis prima poteſtas fuerit notata charactere litterę *t*; ſecunda poteſtas, charactere ſignificabitur *t*2; tertia poteſtas, charactere *t*3; quarta, *t*4; quinta, *t*5: & ſic deinceps. cum verò determinatus fuerit litteræ *t*, valor ternarius, 3: tunc determinatus erit characteris *t*2, valor 9; characteris *t*3, valor 27; characteris *t*4, valor 81; characteris *t*5, valor 243: & ſic deinceps.

Placuit etiam duorum indeterminatorum determinabilium numerorum poteſtatibus inuicem multiplicatis, productos, pariter indeterminatos & determinabiles numeros, ijſdem characteribus producentiũ ſignificare deinceps conſcriptis, vt ex multiplicatione a per r, productum ar; & ex multiplicatione $a2$ per r, productum $a2r$, & ex multiplſcatione a per $r2$, productum $ar2$.

Quibus characteribus à Vietta, Herigonio, Beugrand penes Cauallerium, vſitatis, conuenientia nos adinuenimus nomina. Nam productum ar, ex multiplicatione primarum poteſtatum a, & r, vocamus, Vniprimam: & productum $a2r$, ex multiplicatione ſecundæ poteſtatis a, per primam r, vocamus, Biprimam: productum verò $ar2$, ex multiplicatione primæ a, per ſecundam r, vocamus, Vniſecundam: & $a3r$, productum tertiæ a, per primam r, vocamus, Triprimam: & $a2r2$, ſecundæ a, per ſecundam r, Biſecundam: & $ar3$, primæ a, per tertiam r, Vnitertiam: item $a4r$, Quadriprimam: $a3r2$, Triſecundam: $a2r3$, Bitertiam: $ar4$, Vniquartam. & ſic reliquas

$a5r$, Quintiprimam.
$a4r2$, Quadriſecundam.
$a3r3$, Tritertiam.
$a2r4$, Biquartam.
$ar5$, Vniquintam.
$a6r$, Sextiprimam.
$a5r2$, Quintiſecundam.
$a4r3$, Quadritertiam.
$a3r4$, Triquartam.
$a2r5$, Biquintam.
$ar6$, Vniſextam.
$a7r$, Septimiprimam.
$a6r2$, Sextiſecundam.
$a5r3$, Quintitertiam.
$a4r4$, Quadriquartam.
$a3r5$, Triquintam.

a2r6, Biſextam.
ar7, Vniſeptimam.
a8r, Octauiprimam.
a7r2, Septimiſecundam.
a6r3, Sextitertiam.
a5r4, Quintiquartam.
a4r5, Quadriquintam.
a3r6, Triſextam.
a2r7, Biſeptimam.
ar8, Vnioctauam.

a9r, Noniprimam.
a8r2, Octauiſecundam,
a7r3, Septimitertiam.
a6r4, Sextiquartam.
a5r5, Quintiquintam.
a4r6, Quadriſextam.
a3r7, Triſeptimam.
a2r8, Bioctauam.
ar9, Vninonam.

Quare ſi litteræ *a*, taxatus fuerit valor 3, & litterę *r*, valor 2; erit characteris *ar* vniprimæ, valor 6, productus multiplicationis 3 per 2: erit deinde characteris *a2*, valor 9; & characteris *a2r* biprimæ, valor 18: item characteris *r2*, valor erit 4; & characteris *ar2* vniſecundæ, valor 12: & ſic deinceps.

Itaque ſicut Euclides in 2. 8. numeroſam triangularem tabulam inſtituit proportionalium ab vnitate, datiſque minimis à numeris, datam inter ſe rationem habentibus: ita eadem methodo, placuit litteratam triangularem tabulam diſponere proportionalium characterum, à data vnitate, propoſitiſque duobus indeterminatis determinabilibus numeris, indeterminatam inter ſe rationem habentibus. Pro charactere autem vnitatis, litteram *u* collocauimus, in vertice triangularis tabulæ, & pro indeterminatis determinabilibus numeris, duas litteras *a*, & *r*.

Ta-

Placuit demum ijſdem Analyſtis, ex numero indeterminato, & determinabili (ſiue poteſtate, ſiue ex poteſtatibus producto) & ex determinato numero, per multiplicationem factum productum indeterminatum pariter atque determinabilem, eodem producentis charactere ſignificari, præſcripto numero multiplicationis. vt *3a2r*, triplum productum ſub ſecunda poteſtate numeri *a*, & ſub prima numeri *r*; vel triplam biprimam: & *10a2r3*, decuplum productum ſub ſecunda poteſtate numeri *a*, & ſub tertia numeri *r*; vel decuplam bitertiam. & ſic de reliquis.

Præter tabulam proportionalium prædictam, oportet aliam tabulam triangularem habere in promptu, quam Analyſtæ vocant, multiplicium tabulam: in qua vnitates in vertice ordinantur, & in lateribus; in area verò numeri, quorum vnúſquiſque inferioris baſis numerus, duorũ, ſibi, quaſi cornua fronti, adiacentium ſuperioris baſis numerorum eſt aggregatum: vt ex ipſius tabulæ patebit lectura; quam exponimus extenſam, à vertice vſque ad decimam baſim.

bſciſſi ;quadruplo producto ſub
dui , ideſt quadrupla triprima;
ſtatibus abſciſſi , & reſidui , ideſt
plo ſub prima poteſtate abſciſ-
quadrupla vnitertia;& ex quar-
ue deinceps , quorum præſtat
re, quàm voces legere, quibus

binomij a+r.

r3.
+4ar3+r4.
2+10a2r3+5ar4+r5.
r2 + 20a3r3 +15a2r4+6ar5

1a5r2 + 35a4r3 + 35a3r4

+56a5r3+70a4r4+56a3r5

2+84a6r3+126a5r4+126-
7+9ar8+r9.
5a8r2 + 120a7r3+ 210a6r4
+120a3r7+ 45a2r8 + 10ar9

monſtrabuntur per inductio-
que litteræ valore.

Eſto

Tabula Multiplicium.

nu-
qui-
ice-

1.

1. 1.

1. 2. 1.

1. 3. 3. 1.

1. 4. 6. 4. 1.

1. 5. 10. 10. 5. 1.

1. 6. 15. 20. 15. 6. 1.

1. 7. 21. 35. 35. 21. 7. 1.

1. 8. 28. 56. 70. 56. 28. 8. 1.

1. 9. 36. 84. 126. 126. 84. 36. 9. 1.

1. 10. 45. 120. 210. 252. 210. 120. 45. 10. 1.

Vtriſque tabulis proportionalium & multiplicium ita compoſitis, vt congruant, vertex vertici, latera lateribus, baſes baſibus æqueordinatis, & vt ſingulæ proportionales congruaut ſingulis multiplicibus; ſi vnaqua que proportionalium per conguentem numerum fuerit mpltiplicata; aliaque ſimilis tabula productorum fuerit ordinata: dicetur tabula nominum: quæ ſequitur, pariter à vertice vſque ad decimam baſim extenſa.

Eſto litteræ *a*, valor 2.
litteræ *r*, valor 3.
ideoque characteris *a+r*, valor 5.

	a2:	4
	2ar:	12
	r2:	9
Secunda poteſtas à	5 :	25
	a3:	8
	3a2r:	36
	3ar2:	54
	r3:	27
Tertia poteſtas à	5:	125
	a4:	16
	4a3r:	96
	6a2r2:	216
	4ar3:	216
	r4:	81
Quarta poteſtas à	5 :	625

Reſiduus dicitur numerus, qui duorum inæqualium numerorum, relinquitur, à maiore, minore ſubtracto; à quibus denominatur. vt numerus binarius, tunc reſiduus dice-

tur, cum à quinario, ternario dempto, relictus fuerit; & à quinario atque ternario denominatus. Characterem autem reſidui numeri, placuit, ex characteribus totius & abſciſſi denotari, à quibus denominatur, lineola, interueniente, quæ ſignum eſt ſubtractionis poſterioris characteris à priore. vt 5 --- 3, valet perinde atque 2. Similiter ſi duo numeri, à quibus reſiduus denominatur, fuerint indeterminati, *t* maior, *a* minor, reſiduus charactere ſignificabitur ex vtriſque *t—a*.

Itaque ſicut *t---a*, prima ſuijpſius poteſtas, fit ex nominibus *t*, *a*, in prima baſi tabulæ nominum iacentibus; ita ſecunda poteſtas eiuſdem reſidui *t---a*, fit ex nominibus in ſecunda baſi, alternatim additis, & ſubtractis, *t2---2ta +a2*; tertia, ex nominibus, in tertia baſi *t3---3t2a+ 3ta2 ---a3*; quarta, ex nominibus, in quarta baſi *t4---4t3a+6t2-a2 ---4ta3 +a4*: & reliquæ deinceps poteſtates, fiunt ſimiliter ex nominibus, in reliquis deinceps baſibus iacentibus.

Huc pariter innumerabilia pertinent huiuſmodi theoremata. Si à toto quodam maiore numero, quiſque minor numerus abſciſſus fuerit: reſidui ſecunda poteſtas relinquitur, ex ſecunda poteſtate totius; dempto duplo producto ſub toto & abſciſſo, ideſt, dempta dupla vniprima; addita ſecunda poteſtate abſciſſi: tertia poteſtas reſidui, relinquitur, ex tertia poteſtate totius; dempto triplo producto ſub ſecunda poteſtate totius & ſub prima abſciſſi, ideſt dempta tripla biprima; addito triplo producto ſub prima

totius

totius & ſub ſecunda abſciſſi, ideſt addita tripla vniſecunda; dempta tertia poteſtate abſciſſi: quarta reſidui, relinquitur, ex quarta totius; dempto quadruplo producto ſub tertia totius, & ſub prima abſciſſi, ideſt, dempta quadrupla triprima; addito ſexcuplo producto ſub ſecundis poteſtatibus totius & abſciſſi, ideſt, addita ſexcupla biſecunda; dempto quadruplo producto ſub prima totius, & ſub tertia abſciſſi, ideſt dempta quadrupla vnitertia; addita quarta abſciſſi. aliaque ſimilia, quorum præſtat characteres oculis intueri, quàm voces legere.

Poteſtates reſidui t — a.

Prima t — a.

Secunda t2 — 2ta + a2.

Tertia t3 — 3t2a + 3ta2 — a3.

Quarta t4 — 4t3a + 6t2a2 — 4ta3 + a4.

Quinta t5 — 5t4a + 10t3a2 — 10t2a3 + 5ta4 — a5.

Sexta t6 — 6t5a + 15t4a2 — 20t3a3 + 15t2a4 — 6ta5 + a6.

Septima t7 — 7t6a + 21t5a2 — 35t4a3 + 35t3a4 — 21t2a5 + 7ta6 — a7.

Octaua t8 — 8t7a + 28t6a2 — 56t5a3 + 70t4a4 — 56t3a5 + 28t2a6 — 8ta7 + a8.

Nona t9 — 9t8a + 36t7a2 — 84t6a3 + 126t5a4 — 126t4a5 + 84t3a6 — 36t2a7 + 9ta8 — a9.

Decima t10 — 10t9a + 45t8a2 — 120t7a3 + 210t6a4 — 252t5a5 + 210t4a6 — 120t3a7 + 45t2a8 — 10ta9 + a10.

 Quæ

Quæ ſimiliter demonſtrabuntur facile per inductionem, determinato cuiuſque litteræ valore.

Eſto litteræ *t*, valor 5.
litteræ *a* valor 3.
ideoque characteris *t*--*a*, valor 2.

t2:	25	*2ta*:	30
a2:	9		

34
30

Secunda poteſtas à 2: 4

t3:	125	3*t2a*:	225
3*ta2*:	135	*a3*:	27
	260		252
	252		

Tertia poteſtas à 2: 8

t4:	625	4*t3a*:	1500
6*t2a2*:	1350	4*ta3*.	540
a4:	81		
	2056		2040
	2040		

Quarta poteſtas à 2: 16

Si-

Similibus exemplis poteſt confirmari,tota conſtructionis poteſtatum ars, à binomijs, & reſiduis: quàm pro quantitatibus omnifariam, in primo noſtro elemento plenius oſtendimus.

Caput 2.

Secundum, pro ſecundo eſt elemento:multifariam progreſſiuorum regulares collectiones; in quibus præcipua noſtri inuenti pars eſt. Accipiatur quilibet numerus, cuius abſcindantur ordinatim vnitas, binarius, ternarius, & deinceps quicunque numeri poſſunt abſcindi,vt vel numerus, vel ſaltem vnitas relinquatur: & reſidui vſque ad vnitatem,totidem ſaluentur, quot abſciſſi, ſinguli reſidui è regione ſuorum abſciſſorum.

Placuit autem acceptum numerum vocare quantitatem totam, & ſignificare littera *t*: eiuſque poteſtates vocare totas; *t2*, totam ſecundam; *t3*, totam tertiam; *t4* totam quartam; & ſic deinceps. placuit etiam acceptos abſciſſos vocare quantitates abſciſſas, & ſignificare littera *a*: item abſciſſorum poteſtates, vocare abſciſſas; *a2*, abſciſſam ſecundam; *a3*, abſciſſam tertiam; *a4*, abſciſſam quartam; & deinceps: reſiduos quoque placuit vocare,quantitates reſiduas, & ſignificare littera *r*: item reſiduorum poteſtates, vocare reſiduas; *r2*, reſiduam ſecundam; *r3*, reſiduam tertiam; *r4*, reſiduam quartam; & deinceps. denique ſub poteſtatibus cuiuſque abſciſſæ, & ſuæ reſiduæ, placuit productos denominare vt ſupra, *ar* vniprimas, *a2r* biprimas, *ar2* vniſecundas, *a3r* triprimas, *a2r2* biſecun-

ſecundas, *ar3* vnitertias, & ſic deinceps.

Sed ecce tabula, in qua cuiuſque numeri ab vnitate vſque primùm ad 7. deinde vſque ad 10. pro vnaqualibet abſciſſa, ſcripta eſt è regione reſidua, & abſciſſa ſecunda, & vniprima, & reſidua ſecunda, & abſciſſa tertia, & biprima, & vniſecunda, & reſidua tertia, & ſic deinceps vſque ad proportionales in decima baſi tabulæ proportionalium iacentes.



Digitized by Google

t	a	r	a2	ar	r2	a3	a2r
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	2	1	2	4	1	2
	2	1	4	2	1	8	4
4	1	3	1	3	9	1	3
	2	2	4	4	4	8	8
	3	1	9	3	1	27	9
5	1	4	1	4	16	1	4
	2	3	4	6	9	8	12
	3	2	9	6	4	27	18
	4	1	16	4	1	64	16
6	1	5	1	5	25	1	5
	2	4	4	8	16	8	16
	3	3	9	9	9	27	27
	4	2	16	8	4	64	32
	5	1	25	5	1	125	25
7	1	6	1	6	36	1	6
	2	5	4	10	25	8	20
	3	4	9	12	16	27	36
	4	3	16	12	9	64	48
	5	2	25	10	4	125	50
	6	1	36	6	1	216	36

t	ar2	r3	a4	a3r	a2r2	ar3
2	1	1	1	1	1	1
3	4	8	1	2	4	8
	2	1	16	8	4	2
4	9	27	1	3	9	27
	8	8	16	16	16	16
	3	1	81	27	9	3
5	16	64	1	4	16	64
	18	27	16	4	36	54
	12	8	81	54	36	24
	4	1	256.	64	16	4
6	25	125	1	5	25	125
	32	64	16	32	64	128
	27	27	81	81	81	81
	16	8	256	128	64	32
	5	1	625	125	25	5
7	36	216	1	6	36	216
	50	125	16	40	100	250
	48	64	81	108	144	192
	36	27	256	192	144	108
	20	8	625	250	100	40
	6	1	1296	216	36	6

t	r4	a5	a4r	a3r2	a2r3	ar4
2	1	1	1	1	1	1
3	16	1	2	4	8	16
	1	32	16	8	4	2
4	81	1	3	9	27	81
	16	32	32	32	32	32
	1	243	81	27	9	3
5	256	1	4	16	64	256
	81	32	48	72	108	162
	16	243	162	108	72	48
	1	1024	256	64	16	4
6	625	1	5	25	125	625
	256	32	64	128	256	512
	81	243	243	243	243	243
	16	1024	512	256	128	64
	1	3125	625	125	25	5
7	1296	1	6	36	216	1296
	625	32	80	200	500	1250
	256	243	324	432	576	768
	81	1024	768	576	432	324
	16	3125	1250	500	200	80
	1	7776	1296	216	36	6

t	*r5*	*a6*	*a5r*	*a4r2*	*a3r3*
2	1	1	1	1	1
3	32	1	2	4	8
	1	64	32	16	8
4	243	1	3	9	27
	32	64	64	64	64
	1	729	243	81	27
5	1024	1	4	16	64
	243	64	96	144	216
	32	729	486	324	216
	1	4096	1024	256	64
6	3125	1	5	25	125
	1024	64	128	256	512
	243	729	729	729	729
	32	4096	2048	1024	512
	1	15625	3125	625	125
7	7776	1	6	36	216
	3125	64	160	400	1000
	1024	729	972	1296	1728
	243	4096	3072	2304	1728
	32	15625	6250	2500	1000
	1	46656	7776	1296	216

a2r4

1	a2r4	ar5	r6	a7	a6r
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	1	2
	4	2	1	128	64
4	81	243	729	1	3
	64	64	64	128	128
	9	3	1	2187	729
5	256	1024	4096	1	4
	324	486	729	128	192
	144	96	64	2187	1458
	16	4	1	16384	4096
6	625	3125	15625	1	5
	1024	2048	4096	128	256
	729	729	729	2187	2187
	256	128	64	16384	8192
	25	5	1	78125	15625
7	1296	7776	46656	1	6
	2500	6250	15625	128	320
	2304	3072	4096	2187	2916
	1296	972	729	16384	12288
	400	160	64	78125	31250
	36	6	1	279936	46656

t	a5r2	a4r3	a3r4	a2r5	ar6
2	1	1	1	1	1
3	4	8	16	32	64
	32	16	8	4	2
4	9	27	81	243	729
	128	128	128	128	128
	243	81	27	9	3
5	16	64	256	1024	4096
	288	432	648	972	1458
	972	648	432	288	192
	1024	256	64	16	4
6	25	125	625	3125	15625
	512	1024	2048	4096	8192
	2187	2187	2187	2187	2187
	4096	2048	1024	512	256
	3125	625	125	25	5
7	36	216	1296	7776	46656
	800	2000	5000	12500	31250
	3888	5184	6912	9216	12288
	9216	6912	5184	3888	2916
	12500	5000	2000	800	320
	7776	1296	216	36	6

Digitized by Google

t	r7	a8	a7r	a6r2	a5r3
2	1	1	1	1	1
3	128	1	2	4	8
	1	256	128	64	32
4	2187	1	3	9	27
	128	256	256	526	256
	1	6561	2187	729	243
5	16384	1	4	16	64
	2187	256	384	576	864
	128	6561	4374	2916	1944
	1	65536	16384	4096	1024
6	78125	1	5	25	125
	16384	256	512	1024	2048
	2187	6561	6561	6561	6561
	128	65536	32768	16384	8192
	1	390625	78125	15625	3125
7	279936	1	6	36	216
	78125	256	640	1600	4000
	16384	6561	8748	11664	15552
	2187	65536	49152	36864	27648
	128	390625	156250	62500	25000
	1	1679616	279936	46656	7776

t	a^4r^4	a^3r^5	a^2r^6	ar^7	r^8
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	128	256
	16	8	4	2	1
4	81	243	729	2187	6561
	256	256	256	256	256
	81	27	9	3	1
5	256	1024	4096	16384	65536
	1296	1944	2916	4374	6561
	1296	864	576	384	256
	256	64	16	4	1
6	625	3125	15625	78125	390625
	4096	8192	16384	32768	65536
	6561	6561	6561	6561	6561
	4096	2048	1024	512	256
	625	125	25	5	1
7	1296	7776	46656	279936	1679616
	10000	25000	62500	156250	390625
	20736	27648	36864	49152	65536
	20736	15552	11664	8748	6561
	10000	4000	1600	640	256
	1296	216	36	6	1

t	a9	a8r	a7r2	a6r3
2	1	1	1	1
3	1	2	4	8
	512	256	128	64
4	1	3	9	27
	512	512	512	512
	19683	6561	2187	729
5	1	4	16	64
	512	768	1152	1728
	19683	13122	8748	5832
	262144	65536	16384	4096
6	1	5	25	125
	512	1024	2048	4096
	19683	19683	19683	19683
	262144	131072	65536	32768
	1953125	390625	78125	15625
7	1	6	36	216
	512	1280	3200	8000
	19683	26244	34992	46656
	262144	196608	147456	110592
	1953125	781250	312500	125000
	10077696	1679616	279936	46656

t	*a5r4*	*a4r5*	*a3r6*	*a2r7*	*ar8*
2	1	1	1	1	1
3	16	32	64	128	256
	32	16	8	4	2
4	81	243	729	2187	6561
	512	512	512	512	512
	243	81	27	9	3
5	256	1024	4096	16384	65536
	2592	3888	5832	8748	13122
	3888	2592	1728	1152	768
	1024	256	64	16	4
6	625	3125	15625	78125	390625
	8192	16384	32768	65536	131072
	19683	19683	19683	19683	19683
	16384	8192	4096	2048	1024
	3125	625	125	25	5
7	1296	7776	46656	279936	1679616
	20000	50000	125000	312500	781250
	62208	82944	110592	147456	196608
	82944	62208	46656	34992	26244
	50000	20000	8000	3200	1280
	7776	1296	216	36	6

r	r9	a10	a9r	a8r2
2	1	1	1	1
3	512 1	1 1024	2 512	4 256
4	19683 512 1	1 1024 59049	3 1024 19683	9 1024 6561
5	262144 19683 512 1	1 1024 59049 1048576	4 1536 39366 262144	16 2304 26244 65536
6	1953125 262144 19683 512 1	1 1024 59049 1048576 9765625	5 2048 59049 524288 1953125	25 4096 59049 262144 390625
7	10077696 1953125 262144 19683 512 1	1 1024 59049 1048576 9765625 60466176	6 2560 78732 786432 3906250 10076696	36 6400 104976 589824 1562500 1679616

t	*a7r3*	*a6r4*	*a5r5*	*a46r*
2	1	1	1	1
3	8	16	32	64
	128	64	32	16
4	27	81	243	729
	1024	1024	1024	1024
	2187	729	243	81
5	64	256	1024	4096
	3456	5184	7776	11664
	17496	11664	7776	5184
	16384	4096	1024	256
6	125	625	3125	15265
	8192	16384	32768	65536
	59049	59049	59049	59049
	131072	65536	32768	16384
	78125	15625	3125	625
7	216	1296	7776	46656
	16000	40000	100000	250000
	139968	186624	248832	331776
	442368	331776	248832	186624
	625000	250000	100000	40000
	279936	46656	7776	1296

t	a^3r^7	a^2r^8	ar^9	r^{10}
2	1	1	1	1
3	128	256	512	1024
	8	4	2	1
4	2187	6561	19683	59049
	1024	1024	1024	1024
	27	9	3	1
5	16384	65536	262144	1048576
	17496	26244	39366	59049
	3456	2304	1536	1024
	64	16	4	1
6	78125	390625	1953125	9765625
	131072	262144	524288	1048576
	59049	59049	59049	59049
	8192	4096	2048	1024
	125	25	5	1
7	279936	1679616	10077696	60466176
	625000	1562500	3906250	9765625
	442368	589824	786432	1048576
	139968	104976	78732	59049
	16000	6400	2560	1024
	216	36	6	1

t	*a*	*r*	*a2*	*ar*	*r2*	*a3*	*a2r*
8	1	7	1	7	49	1	7
	2	6	4	12	36	8	24
	3	5	9	15	25	27	45
	4	4	16	16	16	64	64
	5	3	25	15	9	125	75
	6	2	36	12	4	216	72
	7	1	49	7	1	343	49
9	1	8	1	8	64	1	8
	2	7	4	14	49	8	28
	3	6	9	18	36	27	54
	4	5	16	20	25	64	80
	5	4	25	20	16	125	100
	6	3	36	18	9	216	108
	7	2	49	14	4	343	98
	8	1	64	8	1	512	64
10	1	9	1	9	81	1	9
	2	8	4	16	64	8	32
	3	7	9	21	49	27	63
	4	6	16	24	36	64	96
	5	5	25	25	25	125	125
	6	4	36	24	16	216	144
	7	3	49	21	9	343	147
	8	2	64	16	4	512	128
	9	1	81	9	1	729	81

t	ar2	r3	a4	a3r	a2r2	cr3
8	49	343	1	7	49	343
	72	216	16	48	144	432
	75	125	81	135	225	375
	64	64	256	256	256	256
	45	27	625	375	225	135
	24	8	1296	432	144	48
	7	1	2401	343	49	7
9	64	512	1	8	64	512
	98	343	16	56	196	686
	108	216	81	162	324	648
	100	125	256	320	400	500
	80	64	625	500	400	320
	54	27	1296	648	324	162
	28	8	2401	686	196	56
	8	1	4096	512	64	8
10	81	729	1	9	81	729
	128	512	16	64	256	1024
	147	343	81	189	441	1029
	144	216	256	384	576	864
	125	125	625	625	625	625
	96	64	1296	864	576	384
	63	27	2401	1029	441	189
	32	8	4096	1024	256	64
	9	1	6561	729	81	9

t	r4	a5	a4r	a3r2	a2r3	ar4
8	2401	1	7	49	343	2401
	1296	32	96	288	864	2592
	625	243	405	675	1125	1875
	256	1024	1024	1024	1024	1024
	81	3125	1875	1125	675	405
	16	7776	2592	864	288	96
	1	16807	2401	343	49	7
9	4096	1	8	64	512	4096
	2401	32	112	392	1372	4802
	1296	243	486	972	1944	3888
	625	1024	1280	1600	2000	2500
	256	3125	2500	2000	1600	1280
	81	7776	3888	1944	972	486
	16	16807	4802	1372	392	112
	1	32768	4096	512	6	8
10	6561	1	9	81	729	6561
	4096	32	128	512	2048	8192
	2401	243	567	1323	3087	7203
	1296	1024	1536	2304	3456	5184
	625	3125	3125	3125	3125	3125
	256	7776	5184	3456	2304	1536
	81	16807	7203	3087	1323	567
	16	32768	8192	2048	512	128
	1	59049	6561	729	81	9

t	*r5*	*a6*	*a5r*	*a4r2*	*a3r3*
8	16807	1	7	49	343
	7776	64	192	576	1728
	3125	729	1215	2025	3375
	1024	4096	4096	4096	4096
	243	15625	9375	5625	3375
	32	46656	15552	5084	1728
	1	117649	16807	401	343
9	32768	1	8	64	512
	16807	64	224	784	2744
	7776	729	1458	2916	5832
	3125	4096	5120	6400	8000
	1024	15625	12500	10000	8000
	243	46656	233 8	11664	5832
	32	117649	33614	9604	2744
	1	262144	32768	4096	512
10	59049	1	9	81	729
	32768	64	256	1024	4096
	16807	729	1701	3969	9261
	7776	4096	6144	9216	13824
	3125	15625	15625	15625	15625
	1024	46656	31104	20736	13824
	243	117649	50421	21609	9261
	32	262144	65536	16384	4096
	1	531441	59049	6561	729

a2r4

[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	21
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1638
[illegible]	[illegible]	[illegible]	7812
[illegible]	[illegible]	[illegible]	27993
[illegible]	[illegible]	[illegible]	8235
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	218
[illegible]	[illegible]	[illegible]	1638
[illegible]	[illegible]	[illegible]	781
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

a5r2	a4r3	a3r4	a2r5	ar6	r7
49	343	2401	16807	117649	823543
1152	3456	10168	31104	93312	279936
6075	10125	16875	28125	46875	78125
16384	16384	16384	16384	16384	16384
28125	16875	10125	6075	3645	2187
31104	10168	3456	1152	384	128
16807	2401	343	49	7	1
64	512	4096	32768	262144	2097152
1568	5488	19208	67228	235298	823543
8748	17496	34992	69984	139968	279936
25600	32000	40000	50000	62500	78125
[illegible]	[illegible]	32000	25600	20480	16384
[illegible]	[illegible]	17496	8748	4374	2187
[illegible]	[illegible]	5488	1568	448	128
[illegible]	[illegible]	512	64	8	1
[illegible]	[illegible]	6561	59049	531441	4782969
[illegible]	[illegible]	[illegible]	131072	524288	2097152
[illegible]	[illegible]	[illegible]	151263	352947	823543
[illegible]	[illegible]	[illegible]	124416	186624	279936
[illegible]	[illegible]	[illegible]	78125	78125	78125
[illegible]	[illegible]	[illegible]	36864	24576	16384
[illegible]	[illegible]	[illegible]	11907	5103	2187
[illegible]	[illegible]	[illegible]	2048	512	128
[illegible]	[illegible]	[illegible]	81	9	1

t	a2r4	ar5	r6	a7	a6r
8	2401	16807	117649	1	7
	5084	15552	46656	128	384
	5625	9375	15625	2187	36 5
	4096	4096	4096	16384	16384
	2025	1215	729	78125	46875
	576	192	64	279936	93312
	49	7	1	823543	117649
9	4096	32768	262144	1	8
	9604	33614	117649	128	448
	11664	23328	46656	2187	4374
	10000	12500	15625	16384	20480
	6400	5120	4096	78125	62500
	2916	1458	729	279936	139968
	784	224	64	823543	235298
	64	8	1	2097152	262144
10	6561	59049	531441	1	9
	16384	65536	262144	128	512
	21609	50421	117649	2187	5103
	20736	31104	46656	16384	24576
	15625	15625	15625	78125	78125
	9216	6144	4096	279936	186624
	3969	1701	729	823543	352947
	1024	256	64	2097152	524288
	81	9	1	4782969	531441

t	a^5r^2	a^4r^3	a^3r^4	a^2r^5	ar^6	r^7
8	49	343	2401	16807	117649	823543
	1152	3456	10168	31104	93312	279936
	6075	10125	16875	28125	46875	78125
	16384	16384	16384	16384	16384	16384
	28125	16875	10125	6075	3645	2187
	31104	10168	3456	1152	384	128
	16807	2401	343	49	7	1
9	64	512	4096	32768	262144	2097152
	1568	5488	19208	67228	235298	823543
	8748	17496	34992	69984	139968	279936
	25600	32000	40000	50000	62500	78125
	50000	40000	32000	25600	20480	16384
	69984	34992	17496	8748	4374	2187
	67228	19208	5488	1568	448	128
	32768	4096	512	64	8	1
10	81	729	6561	59049	531441	4782969
	2048	8192	32768	131072	524288	2097152
	11907	27783	64827	151263	352947	823543
	36864	55296	82944	124416	186624	279936
	78125	78125	78125	78125	78125	78125
	124416	82944	55296	36864	24576	16384
	151263	64827	27783	11907	5103	2187
	131072	32768	8192	2048	512	128
	59049	6561	729	81	9	1

1	aa	a5	a6	a7	
8	2401	16807	117649	1	
	5184	15552	46656	128	[illegible]
	5625	9375	15625	2187	3[illegible]
	4096	4096	4096	16384	163[illegible]
	2025	1215	729	78125	46[illegible]
	576	192	64	279936	93[illegible]
	49	7	1	823543	117[illegible]
9	4096	32768	262144	1	
	9604	33614	117649	128	4[illegible]
	11664	23328	46656	[illegible]	[illegible]
	10000	12500	15625	[illegible]	
	6400	5120	4096	[illegible]	
	2916	1458	729	[illegible]	
	784	224	64	[illegible]	
	64	8	[illegible]	[illegible]	
10	6561	59049	531[illegible]	[illegible]	
	16384	65536	262[illegible]	[illegible]	
	21609	50421	117[illegible]	[illegible]	
	20736	31104	46[illegible]	[illegible]	
	15625	15625	15[illegible]	[illegible]	
	9216	6144	40[illegible]	[illegible]	
	3969	1701	7[illegible]	[illegible]	
	1024	256	6[illegible]	[illegible]	
	81	9	[illegible]	[illegible]	

t	a5r2	a4r3	a3r4	a2r5	ar6	r7
8	49	343	2401	16807	[illegible]	[illegible]
	1152	3456	10168	31104	[illegible]	[illegible]
	6075	10125	16875	28125	[illegible]	[illegible]
	16384	16384	16384	16384	[illegible]	[illegible]
	28125	16875	10125	6075	3645	[illegible]
	31104	10168	3456	1152	[illegible]	[illegible]
	16807	2401	343	49	7	[illegible]
9	64	512	4096	32768	[illegible]	[illegible]
	1568	5488	19208	67228	[illegible]	[illegible]
	8748	17496	34992	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	25600	32000	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	16
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1

t	a8	a7r	a6r2	a5r3	a4r4
8	1	7	49	343	2401
	256	768	2304	6912	19936
	6561	10935	18225	30375	50625
	65536	65536	65536	65536	65536
	390625	234375	140625	84375	50625
	1679616	559872	186624	61008	19936
	5764801	823543	117649	16807	2401
9	1	8	64	512	4096
	256	896	3136	10976	38416
	6561	13122	26244	52488	104976
	65536	81920	102400	128000	160000
	390625	312500	250000	200000	160000
	1679616	839808	419904	209952	104976
	5764801	1647086	470596	134456	38416
	16777216	2097152	262144	32768	4096
10	1	9	81	729	6561
	256	1024	4096	16384	65536
	6561	15309	35721	83349	194481
	65536	98304	147456	221184	331776
	390625	390625	390625	390625	390625
	1679616	1119744	746496	497664	331776
	5764801	2470629	1058841	453789	194481
	16777216	4194304	1048576	262144	65536
	43046721	4782969	531441	59049	6561

1	a^3r^5	a^2r^6	ar^7	r^8
8	16807	117649	823543	5764801
	61008	186624	559872	1679616
	84375	140625	234375	390625
	65536	65536	65536	65536
	30375	18225	10935	6561
	6912	2304	768	256
	343	49	7	1
9	32768	262144	2097152	16777216
	134456	470596	1647086	5764801
	209952	419904	839808	1679616
	200000	250000	312500	390625
	128000	102400	81920	65536
	52488	26244	13122	6561
	10976	3136	896	256
	12	64	8	1
10	59049	531441	4782969	43046721
	262144	1048576	4194304	16777216
	453789	1058841	2470629	5764801
	497664	746496	1119744	1679616
	390625	390625	390625	390625
	221184	147456	98304	65536
	83349	35721	15309	6561
	16384	4096	1024	256
	729	81	9	1

t	a9	a8r	a7r2	a6r3
8	1	7	49	343
	512	1536	6408	13824
	19683	32805	54675	91125
	262144	262144	262144	262144
	1953125	1171875	703125	421875
	10077696	3349232	1119744	366048
	40353607	5764861	823543	117649
9	1	8	64	512
	512	1792	6272	21952
	19683	39366	78732	157464
	262144	327680	409600	512000
	1953125	1562500	1250000	1000000
	10077696	5038848	2519424	1259712
	40353607	11529602	3294172	941192
	134217728	16777216	2097152	262144
10	1	9	81	729
	512	2048	8192	32768
	19683	45927	107163	250047
	262144	393216	589824	884736
	1953125	1953125	1953125	1953125
	10077696	6718464	4478976	2985984
	40353607	17294403	7411887	31765 3
	134217728	33554432	8388608	2097152
	387420489	43046721	4782969	531441

t	a^5r^4	a^4r^5	a^3r^6	a^2r^7	ar^8
8	2401	16807	117649	823543	5764861
	39872	124416	366048	1119744	3349232
	151875	253125	421875	703125	1171875
	262144	262144	262144	262144	262144
	253125	151875	91125	54675	32805
	124416	39872	13824	4608	1536
	16807	2401	343	49	7
9	4096	32768	262144	2097152	16777216
	76832	268912	941192	3294172	11529602
	314928	629856	1259712	2519424	5038848
	640000	800000	1000000	1250000	1562500
	800000	640000	512000	409600	327680
	629856	314928	157464	78732	39366
	268912	76832	21952	6272	1792
	32768	4096	512	64	8
10	6561	59049	531441	4782969	43046721
	131072	524288	2097152	8388608	33554432
	583443	1361367	3176523	7411887	17294403
	1327104	1990656	2985984	4478976	6718464
	1953125	1953125	1953125	1953125	1953125
	1990656	1327104	884736	589824	393216
	1361367	583443	250047	107163	45927
	524288	131072	32768	8192	2048
	59049	6561	729	81	9

t	r9	a10	a9r	a8r2
8	40353607	1	7	49
	10077696	1024	3072	9216
	1953125	59049	98415	164025
	262144	1048576	1048576	1048576
	19683	9765625	5859375	3515625
	512	60466176	20155392	6698464
	1	282475249	40353607	5764861
9	134217728	1	8	64
	40353607	1024	3584	12544
	10077696	59049	118098	236196
	1953125	1048576	1310720	1638400
	262144	9765625	7812500	6250000
	19683	60466176	30233088	15116544
	512	282475249	80707214	23059204
	1	1073741824	134217728	16777216
10	387420489	1	9	81
	134217728	1024	4096	16384
	40353607	59049	137781	321489
	10077696	1048576	1572864	2359296
	1953125	9765625	9765625	9765625
	262144	60466176	40310784	26873856
	19683	282475249	121060821	51883209
	512	1073741824	268435456	67108864
	1	3486784401	387420489	43046721

r	a7r3	a6r4	a5r5	a4r6
8	343	2401	16807	117649
	27648	79744	248832	746496
	273375	455625	759375	1265625
	1048576	1048576	1048576	1048576
	2109375	1265625	759375	455625
	2196288	746496	248832	79744
	823543	117649	16807	2401
9	512	4096	32768	262144
	43904	153664	537824	1882384
	472392	944784	1889566	3779136
	2048000	2560000	3200000	4000000
	5000000	4000000	3200000	2560000
	7558272	3779136	1889566	944784
	6588344	1882384	537824	153664
	2097152	262144	32768	4096
10	729	6561	59049	531441
	65536	262144	1048576	4194304
	750141	1750329	4084101	9529569
	3538944	5308416	7962624	11943936
	9765625	9765625	9765625	9765625
	17915904	11943936	7962624	5308416
	22235661	9529569	4084101	1750329
	16777216	4194304	1048576	262144
	4782969	531441	59049	6561

t	a3r7	a2r8	ar9	r10
8	823543	5764861	40353607	282475249
	2196288	6698464	20155392	60466176
	2109375	3515625	5859375	9765625
	1048576	1048576	1048576	1048576
	164025	164025	98415	59049
	9216	9216	3072	1024
	49	49	7	1
9	2097152	16777216	134217728	1073741824
	6588344	23059204	80707214	282475249
	7558272	15116544	30233088	60466176
	5000000	6250000	7812500	9765625
	2048000	1638400	1310720	1048576
	472392	236196	118098	59049
	43904	12544	3584	1024
	512	64	8	1
10	4782969	43046721	387420489	3486784401
	16777216	67108864	268435456	1073741824
	22235661	51883209	121060821	282475249
	17915904	26873856	40310784	60466176
	9765625	9765625	9765625	9765625
	3538944	2359296	1572864	1048576
	750141	321489	137781	59049
	65536	16384	4096	1024
	729	81	9	1

In præcedenti tabula progreſſiuas quantitates expandimus: in ſequenti colligimus, cuiuſque numeri maſſas ex omnibus eiuſdem appellationis proportionalibus, pro vnaquaque numeri abſciſſione ſupra ſingillatim acceptis: videlicet maſſam ex omnibus abſciſſis, quàm ſignificamus charactere *O. a*; & maſſam ex omnibus reſiduis, *O. r*; & maſſam ex omnibus abſciſſis ſecundis *O.a2*; & maſſam ex omnibus vniprimis *O.ar*; & maſſam ex omnibus reſiduis ſecundis, *O.r3*; & reliquas deinceps, quatenus præcedens tabula expanditur.

	O.r	*O.r2*		*O.r3*	*O.ar2*	*O.r4*
1	*O.a*	*O.a2*	*O.ar*	*O.a3*	*O.a2r*	*O.a4*
2	1	1	1	1	1	1
3	3	5	4	9	6	17
4	6	14	10	36	20	98
5	10	30	20	100	50	354
6	15	55	35	225	105	979
7	21	91	56	441	196	2275
8	28	140	84	784	336	4676
9	36	204	120	1296	540	8772
10	45	285	165	2025	825	15333

t	O.ar3 O.a3r	O.a2r2.	O.r5 O.a5	O.ar4 O.a4r	O.a2r3 O.a3r2	O.r6 O.a6
2	1	1	1	1	1	1
3	10	8	33	18	12	65
4	46	34	276	116	68	794
5	146	104	1300	470	260	4890
6	371	259	4425	1449	777	20515
7	812	560	12201	3724	1960	67171
8	1596	1092	29008	8400	4368	184820
9	2892	1968	61776	17172	8856	446964
10	4917	3333	120825	32505	16665	978405

t	O.ar5 O.a5r	O.a2r4 O.a4r2	O.a3r3	O.r7 O.a7	O.ar6 O.a6r
2	1	1	1	1	1
3	34	20	16	129	66
4	310	154	118	2316	860
5	1610	740	560	18700	5750
6	6035	2659	2003	96825	26265
7	18236	7832	5888	376761	93436
8	47244	19856	14988	1200304	278256
9	109020	45528	34176	3297456	725220
10	229845	95205	71445	8080425	1703625

	O.a2r5	O.a3r4	O.r8	O.ar7	O.a2r6
1	O.a5r2	O.a4r3	O.a8	O.a7r	O.a6r2
2	1	1	1	1	1
3	36	24	257	130	68
4	380	236	6818	2446	994
5	2300	1400	72354	21146	7604
6	9945	6009	462979	117971	39619
7	34216	20608	2142595	494732	159320
8	99696	59752	7907396	1695036	531012
9	255960	153792	24684612	4992492	1534488
10	594825	357225	67731333	13072917	3963333

	O.a3r5		O.r9	O.ar8
1	O.a5r3	O.a4r4	O.a9	O.a8r
2	1	1	1	1
3	40	32	513	258
4	526	418	20196	7076
5	3896	3104	282340	79430
6	20051	16003	2235465	542409
7	80192	64064	12313161	2685004
8	265356	211460	52666768	10582460
9	769152	614976	186884496	35277012
10	1984917	1587334	574304985	103008345

t	O.a2r7 O.a7r2	O.a3r6 O.a6r3	O.a4r5 O.a5r4	O.r10 O.a10
2	1	1	1	1
3	132	72	48	1025
4	2708	1268	836	60074
5	26300	11720	7760	1108650
6	165417	72297	48009	10874275
7	778120	337120	224224	71340451
8	2967888	1273008	851640	353815700
9	9655416	4154976	2766692	1427557524
10	27720825	11912505	7936665	4914341925

t	O.ar9 O.a9r	O.a2r8 O.a8r2	O.a3r7 O.a7r3
2	1	1	1
3	514	260	136
4	20710	7594	3238
5	303050	94100	37400
6	2538515	715939	276563
7	14850676	3943352	1503488
7	67518444	17200816	6479148
9	254402940	63090168	23809576
10	828707925	201375525	75832725

	O.a4r6	
s	*O.a6r4*	*O.a5r5.*
2	1	1
3	80	64
4	1834	1510
5	21200	17600
6	157269	130835
7	856352	713216
8	3716116	3098604
9	13596208	11320316
10	43292325	35844325

His paratis, experire, ſi vera ſunt, quæ proponimus theoremata, ſub 5. 2. exempli gratia, tertium.

O.6a2: 2t3—3t2+t.

ideſt, maſſa ex omnibus ſexcuplis abſciſſis ſecundis cuiuſq; totæ, eſt æqualis duplæ totæ tertiæ, dempta tripla tota ſecunda, addita ipſa tota.

Nota, quod interpunctio colon (:) nobis vſuuenit ad ſignificandam æqualitatem.

Eſto

Eſto tota	t:	7
ideoque	$t2$:	49
	$t3$:	343
	$O.a2$:	91
	$2t3$:	686
	t:	7
	$2t3+t$:	693
	$-3t2$:	147
	$O.6a2$:	546

Item quartum $O.6ar$: $t3-t$:
ideſt, maſſa ex omnibus ſexcuplis vniprimis cuiuſque totæ, eſt æqualis totæ tertiæ, dempta ipſa tota.

Eſto tota	t:	9
ideoque	$t3$:	729
	$O.ar$:	120
	$t3$:	729
	$-t$:	9
	$O.6ar$:	720

Item decimumſextum

$O.420a3r3$: $3t7+7t3-10t$.

Eſto

Eſto tota	t:	10
ideoque	t3:	1000
	t7:	10000000
	O.a3r3:	71445
	3t7:	30000000
	7t3:	7000
	3t7+7t3:	30007000
	--10t:	100
	60)	30006900
	7)	500115
	Oa3r3:	71445

Similiter alia ſub eadem 5. 2. atque ſub alijs eiuſdem elementi propoſitionibus theoremata facile poteris probare, ope tabularum præcedentium.

Sed ne quidquam tibi deſit, accipe, pro huius capitis coronide, tabellam ſpecioſam, expenſam, vſque ad decimam baſim. Vocamus autem ſpeciem vnamquamlibet maſſam, in qua colliguntur cuiuſque totæ, omnes, eiuſdem appellationis proportionales, pro ſingulis abſciſſionibus acceptæ: & ex ſpeciebus ordinatam tabulam triangularem ſimilem tabulæ proportionalium, ſpecioſam nuncupamus.

Tabula Specioſa.

O.u.

O.a O.r.

O.a2 O.ar O.r2.

O.a3 O.a2r O.ar2 O.r3.

O.a4 O.a3r O.a2r2 O.ar3 O.r4.

O.a5 Oa4r O.a3r2 O.a2r3 O.ar4 O.r5.

O.a6 O.a5r O.a4r2 O.a3r3 O.a2r4 O.ar5 O.r6.

O.a7 O.a6r O.a5r2 O.a4r3 O.a3r4 O.a2r5 O.ar6. O.r7.

O.a8 O.a7r O.a6r2 O.a5r3 O.a4r4 O.a3r5 O.a2r6 O.ar7 O.r8.

O.a9 O.a8r O.a7r2. O.a6r3 O.a5r4 O.a4r5 O.a3r6 O.a2r7 O.ar8 O.r9.

O.a10 O.a9r O.a8r2 O.a7r3 O.a6r4 O.a5r5 O.a4r6 O.a3r7 O.a2r8 O.ar9 O.r10.

Cap.

Cap. 3.

Tertium pro tertio elemento, eſt quædam animaduerſio indeterminatarum determinabilium rationum: quarum te iam habere conceptum, facilè demonſtro; vt interim animaduertas.

Cum ſcripſero *O.a*, ſtatim ex præcedenti capite habes maſſam ex omnibus abſciſſis: ſed quota ſit hæc maſſa, nondum habes, niſi ſcripſero, cuius numeri ſit maſſa. Quod ſi aſſignauero *O.a*, numeri *t* maſſam eſſe; neque ſic habes, quota ſit, niſi ſimul aſſignauero, quotus eſt numerus, valor litteræ *t*. Neque ſi aſſignauero *O.a*, eius numeri maſſam eſſe, cuius *t2* eſt ſecunda poteſtas: neque ſi *O.a*, maſſam eius numeri dixero, cuius *t3* eſt tertia poteſtas; niſi aut litteræ *t*, aut characteris *t2*, vel *t3*, quotus valor ſit, certò certiùs aſſignauero. Similiter cum ſcripſero *O.r*, habes maſſam ex omnibus reſiduis: ſed quantitatem eius non habes. Cum verò licentiam dedero, vt quotum quemque litteræ *t* valorem taxes; tuque huiuſmodi vſus licentia dixeris, *t* valere quinario: ſtatim profectò aſſignabis & *O.a*, valere 10; & *t2*, valere 25; & *t3*, valere 125; & *O.r*, valere 10; & determinatæ litteræ *t*, determinatas eſſe quantitates *O.a*, *O.r*, *t2*, *t3*. Quare data licentia antequam vſus fueris, habebas profectò *O.a*, *O.r*, *t2*, *t3*, quantitates indeterminatas determinabiles.

Rurſum cum ſcripſero duas eiuſdem numeri Maſſas *O.a*, & *O.r*, eſſe æquales; aut maſſam *O.a*, ad *t2*—*t* dimidiã eſſe; nequé tamen aſſignauero, quotus litteræ *t* ſit va-

lor; dederimque aſſignandi licentiam: antequam vtaris licentia, profectò habes determinatam eſſe rationem dimidiam, indeterminatæ quantitatis *O.a*, ad indeterminatam quantitatem *t2---t*. Quæ quidem theoremata interim mihi credis ante demonſtrationem, ex inductione exemplorum; atque ita ex determinatione: ſed cum in ſecundo elemento demõſtrauero; tunc citra omnem inductionem, & ante determinationem valoris litteræ *t*, indubitanter vtraque aſſeuerabis. Habes ergo inter indeterminatas quantitates, determinatas rationes.

Sed ſi quæſiero, quænam ſit ratio Maſſæ *O.a*, cuiuſpiam numeri *t*, ad *t2*; aut Maſſæ *O.2a*, ad *t2*; aut Maſſæ *O.a*, ad *t*; aut maſſæ *O.a*, ad *t3*: ad has profectò interrogationes, data licentia vſus, cum taxaueris litteræ *t* valorem, tunc determinatam aſſignabis rationem; ſed non eamdem ſemper, ad eamdem quæſtionem. Siquidem litteram *t*, taxaueris valere 3; pro ratione *O.a*, ad *t2*, reſpondebis, 3 ad 9: qui ſi taxaueris litteram *t* valere 4; ad eamdem quæſtionem reſpondebis 6 ad 16: quæ non eſt eadem ratio 3 ad 9. item pro alijs valoribus, aliam reſpondebis rationem. Itaque data licentia taxandi litteram *t*, antequam taxaueris, habes rationem *O.a* ad *t2* indeterminatam determinabilem.

Interim notandum eſt, poſſibiles reſponſiones ad quæſtionem propoſitam, pro varijs litteræ *t* valoribus, ordinatim ſemper maioribus; varias, & ſemper ordinatim maiores eſſe: dimidia quidem ratione ſemper minores; ad

ipſam

ipſam verò dimidiam ſemper propiùs accedentes.

Pro litteræ *t* valore	*O.a*	ad *t2*
2	1	4
3	3	9
4	6	16
5	10	25
6	15	36
7	21	49
8	28	64
9	36	81
10	45	100

Quod ſi propoſitæ quæſtioni potuerit, pro quodam valore aſſignabili reſponderi ratio propior dimidiæ, quàm alia quælibet; dicetur ipſa indeterminata ratio *O.a* ad *t2*, quaſi dimidia.

Similiter *O.2a* ad *t2*, ratio eſt indeterminata determinabilis. nam

Pro litteræ *t* valore	*O.2a*	ad *t2*
2	2	4
3	6	9
4	12	16
5	20	25
6	30	36
7	42	49

Pro litteræ t valore	$O.2a$	ad $t2$
8	56	64
9	72	81
10	90	100

atque ita ſemper minoris inæqualitatis eſt ratio: ſed eò ſemper maior, quò pro maiore litteræ t valore, aſſignatur. Quæ ratio indeterminata determinabilis; ſi fuerit aſſignabilis propior æqualitati, quàm data quælibet inæqualitas; dicetur ratio $O.2a$ ad $t2$, quaſi æqualitas.

Item pro litteræ t valore	$O.a$	ad t
2	1	2
3	3	3
4	6	4
5	10	5
6	15	6
7	21	7
8	28	8
9	36	9
10	45	10

eſt ratio indeterminata determinabilis, pro maiore litteræ t valore, ſemper maior, quæ ſi fuerit aſſignabilis maior, quàm data quælibet; dicetur ratio $O.a$ ad t, quaſi infinita.

De-

Digitized by Google

Denique pro litteræ *t* valore	*O.a* ad *t3*	
2	1	8
3	3	27
4	6	64
5	10	125
6	15	216
7	21	343
8	28	512
9	36	729
10	45	1000

eſt indeterminata determinabilis, pro maiore litteræ *t* valore, ſemper minor: quæ ſi fuerit aſſignabilis minor, quàm data quælibet; dicetur ratio *O.a* ad *t3*, quaſi nulla.

Cap. 4.

Quartum, pro quarto elemento, eſt animaduerſio *def.* 10. *lib.* 5. *Elem. Eucl.* & *def.* 5. *lib.* 6. in quibus modus quantitatis rationum aſſumitur; illi quidem ſuperinductus, ſecundum quæm maiores, vel minores rationes dicuntur, *def.* 8. *lib.* 5. ſed ab illo longè alius; & ſecundum quem propiores æqualitati, aut remotiores ab æqualitate rationes dicimus.

Modum autem quantitatis, in vnoquoque genere, concipimus ex duobus. vno: ſecundum quod res eiuſdem generis inuicem ſunt componibiles, vt faciant eiuſdem generis

neris aliam rem, in eiuſdem modi comparatione grandiorem. altero; ſecundum quod res eadem, ſecum ipſa altera, compoſita aliquoties, facit rem eiuſdem generis, in eiuſdem modi comparatione, æquètoties grandiorem. Sic calor calori adpoſitus, facit calidum calidius: & calor ſimul aliquoties iteratus, facit æquèmultoties calidius calidium. item lumen lumini adpoſitum, facit luminoſius luminoſum: idemque lumen ſimul aliquoties iteratum, facit æquemultoties luminoſius luminoſum.

Similiter ratio inæqualitatis maioris, alij maioris inæqualitatis rationi adpoſita, componit rationem maioris inæqualitatis, & magis maioris inęqualitatis, ideſt magis ab æqualitate remotæ, *ex def.* 5.6. Et ratio maioris inæqualitatis, ſecum ipſa altera, aliquoties compoſita, facit rationem multò maioris inæqualitatis æquemultiplicatam, ideſt æquemultò remotiorem ab æqualitate, *ex def.* 10.5. Quare maioris inæqualitatis rationibus, conuenit modus quantitatis ſecundum quem magis vel minùs maioris ſunt inæqualitatis, ideſt, magis, vel minùs ab æqualitate diſtantes.

Eodemque modo, ratio minoris inæqualitatis, alij minoris inæqualitatis rationi adpoſita facit rationem minoris inæqualitatis, & magis minoris inæqualitatis, ideſt remotioris ab æqualitate *ex def.* 5.6. Et ratio minoris inæqualitatis, ſecum ipſa altera, aliquoties compoſita, facit rationem multò minoris inæqualitatis ęquemultiplicatam, ideſt æquemultò remotioris ab æqualitate, *ex def.* 10.5.

Quare

Quare minoris inæqualitatis rationibus, conuenit modus quantitatis, ſecundum quem magis, vel minùs minoris ſunt inæqualitatis, ideſt ſecundum quem magis, vel minùs ab æqualitate diſtant.

Porrò quantum ad hunc modum attinet quantitatis, notandum eſt, rationum quaſi tria genera eſſe. Primum æqualitatis, cui talis modus non conuenit, neque ſeorſim ipſi, neque ſibi & alijs, tamquam vnius generis rationibus: nam æqualitas æqualitati adpoſita, eamdem componit æqualitatem; & maioris inæqualitatis, vel minoris inæqualitatis rationi adpoſita, eamdem inæqualitatis facit rationem. Secundum, maioris inęqualitatis. Tertium, minoris inæqualitatis; quibus tales modos conuenire ſingulis demonſtrauimus: ſed non vtriſque, vt vni generi. nam maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis rationes adpoſitæ, nec magis maioris, nec magis minoris inæqualitatis componunt rationes.

Cap. 5.

Quintum pro quinto elemento eſt inquiſitio quantitatis quæ cuiuſque rationis non ex hypotheſi eſt propria, ſed naturaliter, & citra omnem hypotheſim: altioris rationis, maior; depreſſioris, minor; æquealtæ, eadem; multiplicatæ, æquemultiplex; & ſubmultiplicatæ, æqueſubmultiplex: quam logarithmum vocamus; & nos in quinto elemento, diligenter; quantùm potuimus, perſecuti, non hucuſque quidem attigimus, tamen viam inueniendi aperuimus. Id quod primùm in ratione dupla, ita conabor explicare.

Accipe

Accipe ſeriem infinitam omnium fractionum, in quibus vnitas, & omnes numeri denominant vnitatem: quarum in characteribus, cum conſueuerit numerator, ſcribi ſupra denominatorem interueniente lineola, ſic

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\ \frac{1}{14}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16}\ \&c.$$

nos aliter. ſcripſimus enim primùm numeratorem, deinde ſtatim adſcripſimus denominatorem inter parentheſes clauſum: quod compoſitioni typographycæ longè commodius cum ſit, lectioni etiam tum in latino ſermone, tum in noſtro Italico idiomate, magis conuenit.

1(1), 1(2), 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), 1(7), 1(8), 1(9), 1(10), 1(11), 1(12), 1(13), 1(14), 1(15), 1(16), &c.

Et in accepta ſerie ſume terminos, duplam habentes rationem, ſimplos, dimidios, ſubtriplos, ſubquadruplos, alioſque ſubmultiplos deinceps. Et inter extremos, accipe in eadem ſerie medios quoſque, quorum & maioris extremi ſumma dicetur hyperlogarithmus, eo quod ſuperet logarithmum; eorumdem verò mediorum, & minoris extremi ſumma, dicetur hypologarithmus; eo quod ſuperetur à logarithmo.

Itaque duplæ rationis hyperlogarithmi ſunt, qui ſequuntur: primus inter ſimplos & maximos; & reliqui deinceps ordinatim inter minores, & ſubmultiplos.

1(1).

1(1).
1(2) 1(3).
1(3) 1(4) 1(5).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8) 1(9).

& reliqui in infinitum: quorum inter ſimplo hyperlogarithmus eſt maximus, & reliqui deinceps ordinatim minores.

Item duplæ rationis hypologarithmi ſunt qui ſequuntur primus inter ſimplos, & maximos, & deinceps reliqui

1(2).
1(3) 1(4).
1(4) 1(5) 1(6).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8).
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10).

& in infinitum: quorum inter ſimplos hypologarithmus eſt minimus, & reliqui deinceps ordinatim ſunt maiores.

Eſt autem aſſignatorum quotcunque minimus hyperlogarithmorum, maior quàm maximus hypologarithmorum: & differentia æqualis minimo aſſumptorum extremorum rationis duplæ. cum autem poſſit aſſumi minor extremus, quàm data quælibet quantitas; poſſunt conſequenter aſſumi termini duplam inter ſe rationem habentes, quorum hyperlogarithmi, & hypologarithmi differentia minor, quam data quælibet quantitas. vnde hyperlogarithmus, & hypologarithmus, quaſi ſunt æquales.

Porrò logarithmus illa eſt quantitas, ad, quam tendunt

hyperlogarithmi, cum ſemper deinceps minuuntur, & ad quam tendunt hypologarithmi, cum ſemper deinceps augentur; omni minor hyperlogarithmo, & omni maior hypologarithmo.

Similiter, ſeſquialteræ rationis hyperlogarithmi & hypologarithmi ſunt, qui ſequuntur: & vtrorumque primus eſt inter ſimplos, & maximos; reliqui verò deinceps ordinatim inter minores, & ſubmultiplos.

Hyperlogarithmi.

1(2).
1(4) 1(5).
1(6) 1(7) 1(8).
1(8) 1(9) 1(10) 1(11).
1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14).

& deinceps alij in infinitum.

Hypologarithmi.

1(3).
1(5) 1(6).
1(7) 1(8) 1(9).
1(9) 1(10) 1(11) 1(12).
1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15).

& reliqui deinceps in infinitum.

Similiter alius cuiuſque rationis hyperlogarithmi, & hypologarithmi ſunt aſſignabiles, quorum omnium quantitas intermedia eiuſdem rationis eſt logarithmus. Et hæc eſt ſuæ cuiuſque rationis quantitas naturalis, & earumdem, vel æquealtarum rationum eadem quantitas, ſecundum

altitu-

altitudinis & depreſſionis modum in præcedenti capite fuſiùs declaratum.

Deinde altiorum rationum ſunt maiores logarithmi, & depreſſiorum minores. quod ideò patet, quia altioris hyperlogarithmi rationis, hyperlogarithmos continent depreſſioris: & hypologarithmi continent hypologarithmos.

Nam exempli gratia hyperlogarithmi ſunt rationum

triplæ	& ſeſquialteræ
1(1) 1(2).	1(2).
1(2) 1(3) 1(4) 1(5).	1(4) 1(5).
1(3) 1(4) 1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(6) 1(7) 1(8).

quorum triplæ altioris hyperlogarithmi continent ſeſquialteræ depreſſioris hyperlogarithmos.

Item hypologarithmi ſunt earumdem rationum

triplæ	& ſeſquialteræ
1(2) 1(3).	1(3).
1(3) 1(4) 1(5) 1(6).	1(5) 1(6).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7) 1(8) 1(9).	1(7) 1(8) 1(9).

quorum hypologarithmi triplæ continent hypologarithmos ſeſquialteræ.

Vnde patet etiam, quod compoſitæ rationis logarithmus, eſt aggregatus componentium logarithmorum: nam & hyperlogarithmi duplæ, & ſeſquialteræ, hyperlogarithmos triplæ componunt; & hypologarithmi, hypologarithmos.

Hyperlogarithmi.

Duplæ	Seſquialteræ.
1(1).	1(2).
1(2) 1(3).	1(4) 1(5).
1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8).
1(4) 1(5) 1(6) 1(7).	1(8) 1(9) 1(10) 1(11).

Hypologarithmi.

Duplæ	Seſquialteræ.
1(2).	1(3).
1(3) 1(4).	1(5) 1(6).
1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9).
1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(9) 1(10) 1(11) 1(12).

Sed & duplicatæ rationis duplus eſt logarithmus: nam duplicatæ duplæ rationis, nempe quadruplæ hyperlogarithmi ex binis duplæ rationis hyperlogarithmis aggregatis fiunt.

Hyperlogarithmi quadruplæ

ex duplæ,	& duplæ hyperlogarithmis.
1(1).	1(2) 1(3).
1(2) 1(3).	1(4) 1(5) 1(6) 1(7).
1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11).

Hypologarithmi quadruplæ

ex duplæ,	& duplæ hypologarithmis.
1(2).	1(3) 1(4).
1(3) 1(4).	1(5) 1(6) 1(7) 1(8).
1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12).

Si-

Similiter multiplicatæ cuiuſque rationis æquemultiplex deprehenditur logarithmus; quia quaſi æquemultipli ſunt hyperlogarithmi, & quaſi æquemultipli ſunt hypologarithmi. Et è conuerſo ſubmultiplicatæ deprehenditur ſubmultiplex logarithmus.

APPENDIX.

CVm hæc ſcriberem, mihi contigit rectum tramitem inuenire, ad perſequendos omnium numeroſarum rationum logarithmos. Oportet autem eiuſdem ab initio propoſitæ ſeriei fractionum terminos aſſumere, aliquotenos à primo, ſingulos, binos, ternos, quaternos, quinos, & deinceps. Porrò ex totenis collectas quantitates voco prologarithmos, & totenorum ſeriem, voco ſeriem prologarithmorum.

Eſto autem ſeries ſingulorum *A*: ſeries prologarithmorum ex binis *B*: ſeries prologarithmorum ex ternis *C*: item ex quaternis *D*: item ex quinis *E*: & deinceps aliæ. Deinde ſeries ordinetur exceſſuum, primi prologarithmi ſeriei *B*, ſupra primum ſeriei *A*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium huiuſmodi exceſſuum ſumma, eſt logarithmus rationis duplæ. Nam primus exceſſus, eſt hypologarithmus inter maximos terminos rationis duplæ: ſumma ex primo & ſecundo, eſt hypologarithmus, inter ſubduplos maximorum: ſumma ex primo ſecundo & tertio, eſt hy-

E	1(1 (1(2) 1(3) 1(4) 1(5).	1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10).	1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15).
D	1(1) 1(2) 1(3) 1(4).	1(5) 1(6) 1(7) 1(8).	1(9) 1(10) 1(11) 1(12).
C	1(1) 1(2) 1(3).	1(4) 1(5) 1(6).	1(7) 1(8) 1(9).
B	1(1) 1(2).	1(3) 1(4).	1(5) 1(6).
A	1(1).	1(2).	1(3).

pologarithmus, iuter ſubtriplos maximorum. Ergo ſumma omnium, hypologarithmorum eſt max mus, nempe logarithmus.

Item ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *C*; ſupra primum ſeriei *B*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium huiuſmodi exceſſuum ſumma, eſt logarithmus rationis ſeſquialteræ.

Item ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *D*, ſupra primum ſeriei *C*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium ſumma exceſſuum, eſt logarithmus rationis ſeſquitertiæ.

Similiter ſeries ordinetur exceſſuum primi prologarithmi ſeriei *E*, ſupra primum ſeriei *C*; & ſecundi, ſupra ſecundum; & tertij, ſupra tertium; & ſic deinceps in infinitum: omnium ſumma exceſſuum, eſt logarithmus rationis quam habent numeri ex quotenis eſt ſeries *E*, & ex quotenis eſt ſeries *C*. Nam primus exceſſus, inter maximos eiuſdem rationis terminos eſt hypologari-

gari-

garithmus:primi vero & ſecundi exceſſuum ſumma,eſt hypologarithmus inter ſubduplos maximorum: primi ſecundi & tertij ſumma exceſſuum, eſt hypologarithmus inter ſubtriplos; & ſic deinceps.

Cap. 6.

Sextum & vltimum, pro ſexto eſt elemento: numeroſa duarum propoſitionum quinti elementi reductio, quarum eſt vſus inſignis in ſexto.

Prima, quæ eſt 99. 5.

Quatuor harmonicè diſpoſitarum quantitatum, ſi prima maxima eſt omnium, logarithmus, rationis primæ ad ſecundam, ad logarithmum rationis tertię ad quartam, minor eſt, quàm vt prima ad tertiam; maior, quàm vt ſecunda ad quartam.

Sint quantitates numeroſas inuicem rationes habentes, harmonicè diſpoſitæ 1(4) 1(5) 1(8) 1(9) quarum maxima 1(4).

Dico logarithmum rationis 1(4) ad 1(5) ad logarithmum rationis 1(8) ad 1(9), minorem eſſe, quàm vt 1(4) ad 1(8); maiorem verò, quàm vt 1(5) ad 1(9). ideſt

Dico logarithmum rationis 5 ad 4 ad logarithmum rationis 9 ad 8, minorem eſſe, quàm vt 8 ad 4; maiorem verò, quàm vt 9 ad 5. ideſt

Dico rationem 5 ad 4, ad rationem 9 ad 8, logarithmicè minorem eſſe, quàm vt 8 ad 4; maiorem verò logarithmicè, quàm vt 9 ad 5. ideſt

Dico rationem 5 ad 4 quadruplicatam, depreſſiorem

eſſe

eſſe ratione 9 ad 8 octuplicata: & 5 ad 4 quintuplicatam altiorem eſſe ratione 9 ad 8 nonuplicata.

Et quia ambæ rationes 5 ad 4, & 9 ad 8, ſunt maioris inæqualitatis: inter quas depreſſiores altioribus ſunt minores. Dico 5 ad 4 quadruplicatam minorem eſſe ratione 9 ad 8 octuplicata: & 5 ad 4 quintuplicatam, maiorem eſſe ratione 9 ad 8 nonuplicata. ideſt

Dico poteſtates quartam 5 ad quartam 4, minorem eſſe quam vt octaua 9 ad octauam 8: quintam verò 5 ad quintam 4, maiorem quam vt nona 9 ad nonam 8. ideſt

Dico productos ſub poteſtatibus, ſub quarta 5, & octaua 8, minorem, quàm ſub quarta 4, & octaua 9: ſed ſub quinta 5, & nona 8, maiorem, quàm ſub quinta 4, & nona 9.

Poteſtates.

Quarta	5	625
Octaua	8	16777216
		83886080
		33554432
		100662296
		10485659900

Quar-

Quarta	4	256
Octaua	9	43046721
		258280326
		215233605
		86093442
		11019960576
Quinta	5	3125
Nona	8	134217728
		671088640
		268435456
		134217728
		402653184
		419430400009
Quinta	4	1024
Nona	9	387420489
		1549681956
		774840978
		387420489
		396718580736

Secunda, quæ eſt 100. 5.

Quatuor arithmeticè diſpoſitorum numerorum, ratio primi ad ſecundum totuplicata, quotus eſt primus, maior eſt ratione tertij ad quartum totuplicata, quotus eſt quartus: ratio verò primi ad ſecundum totuplicata, quotus eſt ſecundus, minor eſt, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus eſt tertius.

Sint quatuor arithmeticè diſpoſiti numeri 8, 5, 7, 4.

Dico rationem 8 ad 5 octuplicatam, maiorem eſſe ratione 7 ad 4 quadruplicata: & rationem 8 ad 5 quintuplicatam, minorem ſeptuplicata 7 ad 4. ideſt

Dico poteſtates octauam 8 ad octauam 5, maiorem eſſe, quàm quarta 7 ad quartam 4: quintam 8 ad quintam 5, minorem, quàm ſeptima 7 ad ſeptimam 4. ideſt

Dico productos ſub poteſtatibus, ſub octaua 8, & quarta 4, maiorem eſſe, quàm ſub octaua 5, & quarta 7: & ſub quinta 8, & ſeptima 4, minorem, quàm ſub quinta 5, & ſeptima 7.

Poteſtates.

Octaua	8	16777216
Quarta	4	256

100663296
83886080
33554432

4294967296

Octaua	5	390625
Quarta	7	2401
		390625
		1562500
		781250
		937890625
Quinta	8	32768
Septima	4	16384
		131072
		262144
		98304
		196608
		32768
		536870912

Poteſtates.

Quinta	5	3125
Septima	7	823543
		4117715
		1647086
		823543
		2470629
		2573571875.

Errata. *Corrige.*

In Præfatione præcedenti.

Pag.	*lin.*	*col.*		
52	7	1	164025	273375
	8	1	9216	27648
	9	1	49	343

In Opere ſequenti.

Pag.	*lin.*		
5	20	baſibus, quæ	baſibus, quælibet quantitas fuerit ſumma duarum, quæ
64	25	quoties	quotus
	26	quoties	quotus
207	27	ſupra lineolam	ante parentheſes
208	3	infra lineolam	inter parentheſes.

SOLI DEO GLORIA.

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ ELEMENTA.

Petrus Mengolus, Lucæ Teſino, adoleſcenti optimo S. D.

IN prima lectione Algebræ Specioſæ, tres tabulas triangulares tibi tradidi, multiplicium, & proportionalium, & nominum nuncupatas: earumque uſum, ad componendas, & relinquendas poteſtates binomiorum, & per modum artis, explicaui. Eius demonſtrationem, præſenti tradò libello; quam ex me audiſti: vt legendo recolas; & ad potiora mathemata ſuſcipienda, te præpares. Nihil alienum ſumo; præter quædam, ex Euclide, in quinto, & ſexto: quæ ſuis locis allego, in margine. Vale.

GEO-

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM PRIMVM.

DEFINITIONES.

1 SI tabula triangularis, ex vertice, & baſibus, & lateribus, ita concipiatur ordinata; vt in vertice ſit quædam quantitas; & in prima baſi, ſtatim ſub vertice, ſint duæ quantitates; & in ſecunda baſi, tres; & in tertia, quatuor; & ſic deinceps: in ſingulis baſibus, dicentur, quantitates extremæ, Prima, & Vltima; & his proximæ, Secunda, & Penultima; item Tertia, & Tritultima; Quarta, & Quartultima; & deinceps.

2. Vnde latus primarum omnium quantitatum, dicetur, Primum; & ſecundarum, Secundum; & deinceps: vltimarum quoque dicetur, Vltimum; & penultimarum, Penultimum; & ſic deinceps.

3. In ſingulis quoque lateribus, quantitas, quæ in vertice, aut quæ vertici eſt proxima, dicetur Prima; & reliquæ

deinceps, Secunda, Tertia, Quarta, & ſic in infinitum.

4. Quantitas, vnde progreſſio continuè proportionalium, ordinatur in infinitum, dicetur, Rationalis. & ſignificabitur, charactere *u*.

5. Et prima conſequens à rationali, dicetur, Radix, vel Poteſtas prima. & ſignificabitur, charactere cuiuſq; litteræ alphabeti.

6. Et reliquæ conſequentes, dicentur Poteſtates radicis, Secunda, Tertia, & deinceps, iuxta ſuum cuiuſque ordinem. Et ſignificabitur vnaquæque, eâdem litterâ ſuæ radicis, adſcriptoque ordinis numero. vt radicis *a*, ſecunda poteſtas *a*2, tertia *a*3, & ſic deinceps.

7. Rationalis, licet nomen ordinis non habeat inter poteſtates; tamen habebitur pro ordinata: & dicetur, vnitate minùs ordinata, quàm ſit prima poteſtas.

8. Si tabulæ triangularis in vertice, fuerit rationalis; & in prima baſi, duæ fuerint radices, prior, in primo latere, & poſterior, in vltimo; & deinceps in primo latere, fuerint ordinatæ poteſtates prioris radicis, & in vltimo, poteſtates poſterioris: fuerint autem, & in reliquis lateribus ſecundo, tertio, & deinceps in ſingulis, ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione primi lateris; item in penultimo, tritultimo, & reliquis deinceps lateribus, in ſingulis, ordinatæ fuerint continuè proportionales, in eadem ratione vltimi lateris: & in ſingulis baſibus, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione radicum; in ſecunda baſi, tres, quarum extremæ ſunt ſecundæ poteſtates

ſtates radicum; in tertia, quatuor, quarum extremæ ſunt poteſtates tertiæ, & ſic deinceps: dicetur Tabula Proportionalium. *Huiuſmodi tabulam ordinat Euclides in 2. 8. Elementorum.*

9. In tabula proportionalium, inter extremas, vna quę libet media, ad quam rationalis habuerit rationem compoſitam ex duabus rationibus, ad quaſdã poteſtates vtrarumque radicum; denominabitur ab vtriſque ordinibus poteſtatum, à priore primùm, deinde à poſteriore. & ſignificabitur, ex vtriſq; characteribus, charactere compoſito; ex priore primùm, deinde ex poſteriore. Vt ſi prior eſt radix *a*, poſterior *r*; media, ad quam *u*, rationem habet compoſitam, ex rationibus, *u* ad *a*, & *u* ad *r*, dicetur, Vni prima; & ſignificabitur, charactere *ar*: ad quam verò *u*, rationem habet compoſitam ex rationibus, *u* ad *a2*, & *u* ad *r3*, dicetur, Bitertia; & ſignificabitur charactere *a2r3*: & ſic deinceps.

10. Si tabulæ triangularis in vertice, fuerit vnitas; & in prima baſi, & in lateribus primo, & vltimo, fuerint vnitates; deinceps verò in baſibus, quæ verſus verticem ſibi inſiſtũt, quaſi fronti cornua, dicetur, Tabula multiplicium.

11. Si duæ tabulæ, multiplicium, & proportionalium, ita coaptentur, vertex, vertici, & latera, lateribus, & baſes, baſibus, vt congruant; ideſt, vt quiſque numerus multiplex, congruentem multiplicet proportionalem: producta, dicetur, Tabula Nominum. Significabitur autem vnumquodq; nomen, eodem ſuæ proportionalis chara-

ctere,

ctere, poſt ſuum immediatè numerum conſcripto.

12. In quibuſque proportionalitatibus earumdem, vel non earumdem rationum; homologæ ſunt primùm, antecedentes, antecedentibus, & conſequentes, conſequentibus: deinde permutando, antecedentes ſuis conſequentibus ſunt homologæ: homologarum quoque æquemultiplices, & eædem partes, & ſummæ, & differentiæ, ſunt homologæ.

13. Homologia, eſt ſumptio homologarum, vt & in alia quadam proportionalitate, fiant homologæ.

14. Ratio ex æquali, dicetur, quælibet ratio, ex rationibus compoſita.

Digitized by Google

Tabula Proportionalium.

u

a r

a2 ar r2

a3 a2r ar2 r3

a4 a3r a2r2 ar3 r4

a5 a4r a3r2 a2r3 ar4 r5

a6 a5r a4r2 a3r3 a2r4 ar5 r6

Tabula Multiplicium.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

Tabula Nominum.

u

a r

a2 2ar r2

a3 3a2r 3ar2 r3

a4 4a3r 6a2r2 4ar3 r4

a5 5a4r 10a3r2 10a2r3 5ar4 r5

a6 6a5r 15a4r2 20a3r3 15a2r4 6ar5 r6

Explicationes quarumdam notarum.

Additio ſignificabitur, charactere crucis: vt ex a, & r, collecta ſumma, $a + r$.

Subtractio, charactere lineolæ: vt ex t, dempta a, relinquit differentiam, $t - a$.

Æqualitas, ea interpunctione ſignificabitur, qua partes principes periodi ſolent diſtingui. vt quod $a + r$, eſt æqualis ipſi t,

$$a + r : t.$$

Ratio ſignificabitur interpunctione, qua maximæ partes periodi ſubdiſtinguuntur; ſcilicet puncto, & commate. vt ratio a ad r, ſcribendo,

$$a ; r.$$

Itaque proportio a ad r, ſicut $a2$ ad ar, ſignificabitur, ſcribendo,

$$a ; r : a2 ; ar.$$

Et compoſita ratio ex rationibus. velut ex u ad $a2$, & u ad $r3$, compoſita u ad $a2r3$, ſcribendo,

$$u ; a2 , + u ; r3 : u ; a2r3.$$

vbi comma, inter $a2$, & crucem, vtiliter diſtinguit, ad ſignificandum, non quantitatum $a2$, & u, ſummam $a2 + u$, ſed rationum.

Multiplicata quoque ratio, ſignificabitur. velut $a3$ ad $r3$, triplicata rationis a ad r, ſcribendo,

$$a3 ; r3 : \text{triplicata } a ; r.$$

Theo-

Digitized by Google

Theorema primum, Propoſitio prima.

EX iiſdem rationibus, ex æquali, ſunt eædem rationes.

Hypotheſis.

a; b: c; d.
e; f: g; h.

Dico ex æquali *a; b, -+ e; f: c; d, -+ g; h.*

Præparatio.

e; f: b; i.
g; h: d; l.

Demonſtratio.

11.5. | *b; i: d; l*
12.5. | *a; i: c; l*
def.5.6. | *a; b, -+ e; f: a; i.*
def.5.6. | *c; d, -+ g; h: c; l.*
11.5. | *a; b, -+ e; f: c; d, -+ g; h.* : Quod erat demonſtrandum.

Quare ex iiſdem rationibus, ex æquali, ſunt eædem rationes.

Theor. 2. Prop. 2.

QVantitates proportionales, per homologiam ſunt proportionales.

Demonſtr.

def. 6.5. | Nam conuertendo, quantitates fiunt pro-
12,& 24.5. | portionales: item homologas homologis ad-
15.5 | dendo: item æque multiplicando, & æquepar-
16.5 | tiendo: & permutando: & diuidendo: & com-
17.5
18.5

19.5 ponendo: & homologas ab homologis auſe-
22.5 rendo; & per conuerſionē rationis: & ex æqua-
li in proportione ordinata: coniunctiſq; omni-
fariam huiuſmodi argumentis, quocunque or-
dine, per homologiam, proportionales fiunt.
Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

POteſtates æqueordinatæ totuplicatam habent rationem radicum, quotus eſt ordo.

Hypoth.

Sint radices, *a*, *r*: quarum poteſtates æqueordinatæ, *a*3, *r*3: numerus ordinis, 3.

Dico *a*3; *r*3: triplicatam *a*; *r*.

Demonſtrat.

deſ. 6. | *a*3; *u*: triplicata *a*; *u*.
deſ. 6. | *u*; *r*3: triplicata *u*; *r*.
p. h. | *a*3; *r*3: triplicata *a*; *r*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. Prop.

SI tabulæ triangularis in vertice fuerit rationalis; & in prima baſi, fuerint duæ radices; & in primo, & vltimo latere, fuerint continuè proportionales; & in ſingulis baſibus, ordinatæ fuerint continuè proportionales: erit proportionalium tabula.

De-

Demonſtr.

Cum enim in prima baſi ſint radices : erunt in
def. 6. ſecunda baſi extremæ, ſecundæ poteſtates; dupli-
3. h. catam habentes rationem radicum : quę & dupli-
def. p. catam habent rationem deinceps : ergo ratio ra-
11. 5. dicum eadem eſt, quæ deinceps. Eodemque modo, in ſingulis baſibus, oſtendetur, quod ratio radicum eadem eſt, quæ deinceps. Quare vt in prima baſi, ita in ſecunda, & reliquis, eadem ſemper eſt ratio primę quantitatis ad ſecundam, & ſecundæ ad tertiã, & ſic deinceps; item penultimæ ad vltimam, & tritultimæ ad penultimã, & ſic deinceps. Itaque in binis deinceps lateribus, & in binis deinceps baſibus, quantitates eamdem habent rationẽ radicum, antecedentes, in vno, & conſequentes, in
16. 5. altero latere : ergo permutando, eamdem habent rationẽ, antecedentes, in vna, & conſequentes, in altera baſi: & vt in primo latere ſunt continuè proportionales, vt rationalis ad priorem radicem; ita in ſecundo, & in tertio, & in reliquis deinceps, in eadem ſunt ratione continuè proportionales : & vt in vltimo, ſunt continuè proportionales, vt rationalis ad poſteriorem radicem; ita in penultimo,
def. 8. & tritultimo, & in reliquis deinceps. Quare tabula triangularis, eſt tabula proportionaliũ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

SI tabulæ triangularis in vertice, fuerit rationalis; & in prima baſi, fuerint duæ radices; & in primo, & vltimo latere, fuerint continuè proportionales; & in ſingulis lateribus à primo, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione, quæ deinceps, in primo: erit proportionalium tabula. Item ſi in ſingulis lateribus ab vltimo, fuerint ordinatæ continuè proportionales, in eadem ratione, quæ deinceps, in vltimo: erit proportionalium tabula.

Demonſtr.

Cum in binis deinceps baſibus, & in binis deinceps lateribus à primo, quantitates eandem habeant rationem, quæ deinceps, in primo, antece-
16. 5. dentes, in vna, & conſequentes, in altera baſi: habebunt, permutando, eamdem rationem etiam, antecedentes, in vno, & conſequentes, in altero latere: eritque in baſibus, ratio deinceps, eadem, quæ in prima baſi: eruntque in ſingulis baſibus, continuè proportionales in eadem ratione radi-
4. b. cum: quare tabula triangularis, erit proportionalium tabula. Quod &c.

Simili prorſus demonſtratione, oſtendetur altera pars Theorematis. Quam &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 6. Prop. 6.

IN tabula proportionalium, rationalis ad vnamquamq; mediam, habet rationem cõpoſitam ex rationibus, ad poteſtatem, in primo latere, vnitate minùs ordinatam, quàm ſit ipſa media, in baſi, ab vltima; & ad poteſtatem, in vltimo latere, vnitate minùs ordinatam, quàm ſit ipſa media, in baſi, à prima.

Hypoth. & Demonſt.

Sit in tabula proportionalium, quinta baſis; in
def. p. qua, ſex proportionales: & ſit vna ex medijs, non prima, quæ eſt ſextultima, nec ſexta, quæ eſt vltima, ſed quarta, quæ eſt tritultima. Et ſint, in primo latere, radix *a*; & in vltimo, radix *r*: & ab *a*, ſit ſecunda poteſtas *a2*, vnitate minùs ordinata,
def. 8. quàm tritultima; quæ profectò in primo latere, eſt
def. 3. tertia; & in tritultimo, eſt prima: ſit etiam ab *r*, tertia poteſtas *r3*, vnitate minùs ordinata, quàm
def. 8. quarta; quæ profectò, in vltimo latere, eſt quar-
def. 3. ta; & in quarto, prima: erit quantitas *a2r3*,
def. 9. bitertia, ad quam, rationalis habet rationem compoſitam ex rationibus, ad poteſtates *a2*, & *r3*.

Dico mediam, in quinta baſi, quartam tritultimam, eſſe bitertiam *a2r3*.

Demonſtr.

def. 2. Nam quarta, & tritultima, in quarto eſt, & in tritultimo latere: in quarto quidem, eſt tertia quantitas; & in tritultimo, eſt quarta. Habet er-

go rationalis ad tertiam quarti lateris, rationem compoſitam ex rationibus, ad *r3* primam quarti lateris, & primæ quarti lateris ad tertiam: ſed prima quarti lateris ad ſecundam, & ſecunda ad tertiam, ſunt continuè proportionales, vt prima primi lateris ad ſecundam, & ſecunda ad tertiam: ideoque prima ad tertiam quarti lateris, eſt vt prima *u*, ad tertiam primi *a2*: ergo rationalis ad tertiam quarti lateris, ideſt, ad quartam tritultimam, in quinta baſi, rationem habet compoſitam ex rationibus, *u* ad *r3*, & *u* ad *a2*; eamdem, quam habet ad *a2r3* bitertiam. Ergo in quinta baſi, quarta tritultima, eſt bitertia *a2r3*. Quod &c.

def. 8. — *p. h.* — *p. h.* — 9. 5.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

QVantitas, ad quam rationalis habet rationem compoſitam, ex rationibus ad poteſtates, in primo, & vltimo latere tabulæ proportionalium; eſt media: & eſt in baſi æqueordinata, atque ſumma eſt ordinum poſtatum: & eſt vnitate plus ordinata, in baſi, ab vltima, quàm ſit ordo poteſtatis, in primo latere: item eſt vnitate plus ordinata, in baſi, à prima, quàm ſit ordo poteſtatis, in vltimo latere.

Hypoth.

Sit quantitas *a2r3*, ad quam *u*, rationem habet compoſitam, ex rationibus, *u* ad *a2*, in primo latere, & *u*

ad

ad *r3*, in vltimo, tabulæ proportionalium: quarum poteſtatum ſumma ordinum, ſit ordo quintæ baſis: & quarum poteſtatum, vnitate maiores ordines, eius quidem *a2*, quæ in primo eſt latere, ſit ordo tritultimæ, & eius *r3*, quæ in vltimo eſt latere, ſit ordo quartæ, in baſi.

Dico *a2r3*, eſſe quartam tritultimam, in quinta baſi.

Demonſtr.

Eſt enim *a2*, tertia in primo latere; & vt *u* ad *a2*, ita eſt, in quarto latere, prima ad tertiam:
def. 8. ſed eſt *r3*, prima in quarto latere: ergo *u* ad ter-
p. b.
def. 8. tiam in quarto latere, rationem habet compoſitam, ex rationibus, ad *a2*, & ad *r3*; eamdem,
9. 5. quam ad *a2r3*. Ergo *a2r3*, eſt tertia in quar-
def. 3. to latere: ergo eſt quarta in tritultimo: ergo in
def. 2.
def. p. ſua baſi, eſt quarta tritultima: ſed quarta tritultima non eſt, niſi inter ſex proportionales, quarum & ſexta eſt vltima, & quinta eſt penultima, & ſic
def. 9. deinceps: & ſex proportionales, non niſi in quinta ſunt baſi. Ergo *a2r3* bitertia, eſt & quarta tritultima, in quinta baſi. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 8. Prop. 8.

SVmma cuiuſque baſis nominum in tabula, eſt poteſtas æqueordinata ſummæ radicum.

Hy-

Hypoth.

Sit in tabula nominum baſis tertia, cuius ſumma nominum $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$: ſit quoque ſumma radicum $a + r$.

Dico $a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$, eſſe tertiam poteſtatem $a + r$.

Oportet autem priùs demonſtrare, de ſumma nominũ, præcedentium baſium, videlicet, ſecundæ baſis.

Dico itaque primò $a2 + 2ar + r2$, ſecundam eſſe poteſtatem $a + r$.

Demonſtr.

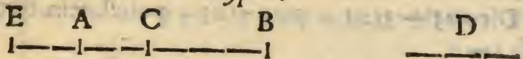
def. 8.	$u; a : a; a2 : r; ar : a + r; a2 + ar$.
& 2. *h.*	$u; r : a; ar : r; r2 : a + r; ar + r2$.
2. *h.*	$u; a + r : a + r; a2 + 2ar + r2$.
	$a2 + 2ar + r2$, eſt ſecunda poteſtas $a + r$. Quod &c.
def. 8. *&* 2. *h.*	$u; a : a2; a3 : ar; a2r : r2; ar2 : a2 + 2ar + r2; a3 + 2a2r + ar2$.
	$u; r : a2; a2r : ar; ar2 : r2; r3 : a2 + 2ar + r2; a2r + 2ar2 + r3$.
2. *h.*	$u; a + r : a2 + 2ar + r2; a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$.
def. 6.	$a3 + 3a2r + 3ar2 + r3$, eſt tertia poteſtas $a + r$. Quod &c.
	Quare &c.

Theo-

Theor. 9. Prop. 9.

SI trium quantitatum, prima maior fuerit, quàm ſecunda; tertia autem maior fuerit exceſſu ipſarum: exceſſus tertiæ, ſupra exceſſum primæ, & ſecundæ; erit exceſſus ſummæ ex ſecunda, & tertia, ſupra primam.

Hypoth.



Sit prima quantitas AB, maior, quàm ſecunda BC, quarum exceſſus CA: ſitq; tertia D, maior, quàm CA.

Dico exceſſum D, ſupra CA, eſſe exceſſum ſummæ, ex D, & BC, ſupra BA.

Præpar.

Adponatur penes CB, & ipſi CA ſuperponatur quantitas CE, æqualis ipſi D.

Demonſtr.

Quoniam EA, eſt exceſſus EC ſupra CA; ideſt, exceſſus D, ſupra CA: necnon eſt exceſſus EB, ſupra BA; ideſt, ſummæ ex D, & BC, ſupra BA: per ſe patet, id quod propoſitum eſt.

Quare &c.

Theor. 10. Prop. 10.

INæqualium radicum, poteſtas maioris, vnà cum alternis nominibus eiuſdem baſis, demptis reliquis, æqueordinata relinquitur poteſtas differentiæ.

Hypoth.

Sint radices inæquales, t maior, a minor: quarum in tabula nominum, in baſi tertia, poteſtas tertia maioris radicis $t3$, vnà cum alterno nomine $3ta2$, demptis reliquis nominibus $3t2a$, & $a3$, relinquitur quantitas $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$; ſit autem differentia radicum $t - a$.

Dico $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$, poteſtatem tertiam eſſe $t - a$.

Oportet autem priùs demonſtrare, in baſibus præcedentibus, videlicet in ſecunda.

Dico itaque primò $t2 - 2ta + a2$, eſſe ſecundam poteſtatem $t - a$.

Demonſtr.

def. 8. | $u; t : t; t2 : a; ta : t - a; t2 - ta.$

& 2. *h.* | $u; a : t; ta : a; a2 : t - a; ta - a2.$

| $t; a : t2; ta : ta; a2 : t2 - ta; ta - a2.$

ex 14.5 | ta, eſt maior, quàm $a2$.

| $t2 - ta$, eſt maior, quàm $ta - a2$.

9. *h.* | $t2 - ta$, dempta $ta - a2$, relinquitur $t2 - 2ta + a2$.

2. *h.* | $u; t - a : t - a; t2 - 2ta + a2.$

def. 6. | $t2 - 2ta + a2$ ſecunda eſt poteſtas $t - a$.

| Quod &c.

def. 8. | $u; t : t2; t3 : ta; t2a : a2; ta2 : t2 - 2ta + a2; t3 - 2t2a + ta2.$

& 2. *h.* | $u; a : t2; t2a : ta; ta2 : a2; a3 : t2 - 2ta + a2; t2a - 2ta2 + a3.$

$t; a:$

2. h. $t;\ a : t3 - 2t2a + ta2,\ t2a - 2ta2 + a3$.

ex 14.5 $t2 - 2t2a + ta2$, maior eſt, quàm $t2a - 2ta2 + a3$.

25. 5. $t2a + a3$, maior, quàm $2ta2$.

9. h. $t3 - 2t2a + ta2$, dempta $t2a - 2ta2 + a3$, relinquitur $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.

2. h. $u;\ t - a : t2 - 2ta + a2;\ t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$.

def. 6. $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$, tertia eſt poteſtas $+ - a$. Quod &c.

Quare &c.



Petrus Mengolus, Adm. R. D. Iacobo Venturolo, Scholarum Piarum Primario Arithmetices Præceptori S. D.

QVos tibi primùm oſtendi characteres, & numeros, libenter vidiſſe te ſignificaſti, & cum tuæ Scholæ profectu multiplicibus exemplis confirmaſti. Immortales tibi ante omnia gratias debeo, quòd mea qualiacunque inuenta reſpexeris, & in tuæ Scholæ fructum conuerteris. Itaque pro redditione gratiarum, eamdem rem tibi aliquando gratam, iterum & pleniùs communico. Tu ergo libellum hunc in tuos vſus ita conuertes. Primùm per numeroſam inductionem exemplorum, duo theoremata confirmabis præcedentis libelli, 8. & 10. quibus ars producendi poteſtates à duorum nominum aggregatis, vel relictis radicibus demonſtratur. deinde ſingula in præſenti libello propoſita. necnon alia plura, quæ tùm indico, tùm ipſe tuopte poteris ingenio adijcere. Vale.

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM SECVNDVM.

DEFINITIONES.

1 QVantitas vtcunque diuiſa in duas partes, dicetur, Tota, & ſignificabitur, charactere *t*.
2 Et partes Totæ, dicentur, Abſciſſa, & Reſidua: & ſignificabitur abſciſſa, charactere *a*; & reſidua, *r*.

3. Poteſtates totæ, dicentur, Tota ſecunda, *t2*; Tota tertia, *t3*; & deinceps: & poteſtates abſciſſæ dicentur, Abſciſſa ſecunda, *a2*; Abſciſſa tertia, *a3*; & deinceps: item poteſtates reſiduæ, dicentur, Reſidua ſecunda, *r2*; Reſidua tertia, *r3*; & deinceps.

4. Si quadam quantitate, diuiſa vtcunque in partes, abſciſſam, & reſiduam; concipiatur à rationali, per ipſas partes, abſciſſam primùm, deinde reſiduam, ordinata proportionalium tabula: & eadem quantitate rurſum diuiſa vtcumque; concipiatur ab eadem rationali, altera propor-

tionalium tabula: quantitates, quarum in vtriſque eædem appellationes, & ijdem characteres; dicentur, inuicem Synonymæ.

5. Item ſynonymarum æquemultiplices, dicentur, Synonymæ.

6. Ideoq; ſi etiam tabulæ nominum fuerint ordinatę; quantitates; quarum eadem ſunt nomina, dicentur Synonimæ.

7. Vnitas ad omnes numeros, pro rationali ſemper habebitur. Vnde conuenienter ſignificabatur rationalis, charactere *u*.

8. Cuiuſque numeri, factis omnibus integris abſciſſionibus, omnium, totidemque ſynonymorum, ſumma, dicetur, Maſſa: & ſignificabitur, littera maiuſcula *O*, ante ſynonymorum characterem ſcripta: vt maſſa ex omnibus abſciſſis, *O. a.* & maſſa ex omnibus triplis biprimis, *O. 3a2r.*

9. Si cuiuſque numeri, factis partibus, fuerit ordinata quædam tabula proportionalium, vel nominum; & loco cuiuslibet proportionalium, concipiatur maſſa ſuorum ſynonymorum: transformabitur tabula proportionalium in aliam, quæ dicetur, Tabula Specioſa.

10. In qua ordinatæ quantitates, dicentur, Species.

11. Tabula verò nominum transformabitur in aliam, quæ dicetur, Tabula Subquadratrix.

12. In qua ordinatæ quantitates, dicentur Subquadratrices.

13. Si

13. Si quælibet ſubquadratrix quantitas, multiplicata fuerit per numerum vnitate maiorem; quàm ſit ordo ſuæ baſis: producta quantitas, dicetur, Quadratrix.

14. Quod ſi, velut ex ſubquadratricibus, ita ex quadratricibus, tabula fuerit ordinata, dicetur Tabula Quadratrix.

15. Si duorum numerorum duæ ſpecioſæ tabulæ fuerint ordinatæ: maſſæ, quarum in vtriuſque ſunt eædem appellationes, & ijdem characteres, dicentur inuicem Homonymæ.

16. Item homonymarum maſſarum ęquemultiplices, dicentur, Homonymæ.

17. Ideoque etiam in duabus ſubquadratricibus tabulis, aut in duabus quadratricibus, maſſæ, dicentur, Homonymæ.

18. Si tres numeri fuerint deinceps vnitate differentes; & medius dicatur, tota: maior quidem, dicetur, Seſquitota; & ſignificabitur, charactere *q*.

19. Minor verò, Semitota: & ſignificabitur, charactere *m*.

20. Et ſicut medij numeri poteſtates dicuntur totæ, ſecunda, tertia, & deinceps: ita maioris numeri poteſtates, dicentur, Seſquitotæ; ſecunda *q*2, tertia *q*3, & deinceps.

21. Minoris autem, Semitotæ; ſecunda *m*2, tertia *m*3, & deinceps.

22. Et ſicut medij numeri dicuntur Maſſæ, Species, Subquadratrices, & Quadratrices: ita maioris numeri, di-

cen-

centur, Seſquimaſſæ, Seſquiſpecies, Seſquiſubquadratrices, & Seſquiquadratrices.

23. Et minoris, dicentur, Semimaſſæ, Semiſpecies, Semiſubquadratrices, & Semiquadratrices.

24. Item, ſicut totæ incrementum, eſt vnitas, ad componendam ſeſquitotam; & decrementum, eſt vnitas, ad relinquendam ſemitotam: ita cuiuslibet totæ, dicetur, Incrementum, numerus addendus, ad componendam ſeſquitotam æqueordinatam.

25. Et Decrementum, ſubtrahendus, ad relinquēdam ſemitotam æqueordinatam.

26. Item cuiuslibet maſſæ Incrementum, dicetur, ſufficiens numerus, ad componendam homonymam ſeſquimaſſam.

27. Et Decrementum, ad relinquendam homonymam ſemimaſſam.

Ta-

Tabula Specioſa.

O.u

O.a O.r

O.a2 O.ar O.r2

O.a3 O.a2r O.ar2 O.r3

O.a4 O.a3r O.a2r2 O.ar3 O.r4

O.a5 O.a4r O.a3r2 O.a2r3 O.ar4 O.r5

Tabula Subquadratrix.

O.u

O.a O.r

O.a2 O.2ar O.r2

O.a3 O.3a2r O.3ar2 O.r3

O.a4 O.4a3r O.6a2r2 O.4ar3 O.r4

O.a5 O.5a4r O.10a3r2 O.10a2r3 O.5ar4 O.r5

Tabula Quadratrix.

O.u

O.2a O.2r

O.3a2 O.6ar O.3r2

O.4a3. O.12a2r O.12ar2 O.4r3

O.5a4 O.20a3r O.30a2r2 O.20ar3 O.5r4

O.6a5 O.30a4r O.60a3r2 O.60a2r3 O.30ar4 O.6r5

Poſtulatum vnicum.

Poſtuletur, vt maſſam aſſumere concedatur homonymam, & proportionalem ad propoſitam quamdam, ſicut numeri, aut vnitas ad inuicem.

Theor. 1. *Prop.* 1.

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, & in qualibet baſi, ſpecies prima, & vltima, ſunt æquales; item ſecunda, & penultima; tertia, & tritultima; & ſic deinceps: item ſeſquiſpecies; & ſemiſpecies homonymæ: & ſpecierum incrementa, & decrementa. Similiter ſubquadratrices, in ſua tabula: & quadratrices, in ſua.

Hypoth. 1.

Sint in tabula ſpecioſa, cuiuſq; numeri, & in tertia baſi, prima ſpecies *O.a*3, & vltima *Or*3.

Dico, *O.a*3, *O.r*3, eſſe æquales.

Demonſtr.

def. 8.*h.* Nã cuiuſq; numeri, quot ſunt abſciſſiones, tot ſunt abſciſſæ, totidemq; reſiduæ: & abſciſſæ ſunt, vnitas, binarius, & deinceps: & reſiduæ ſunt, totidem ordinati, contrario tamen ordine, ſed deinceps, vſque ad binarium, & vnitatem. Quare vnaquæq; abſciſſa, vni reſiduæ eſt æqualis: & abſciſſa tertia, reſiduæ tertiæ; ad quas eadem rationalis, triplicatas habet eaſdem rationes: & omnes abſciſſæ tertiæ, omnibus reſiduis tertijs ſunt ęquales; ideſt, *O.a*3, *O.r*3, ſunt æquales. Quod &c.
p. p.

Hypoth. 2.

Sint deinde, in eadẽ tertia baſi, ſecunda ſpecies *O.a*2*r*, & penultima *O.ar*2.

Dico, *O.a*2*r*, *O.ar*2, eſſe æquales.

Demonſtr.

ſup. Singulæ *a*, ſingulis *r*, ſunt æquales: & ſingulæ *a2*, ſingulis *r2*: item ſingulæ biprimæ *a2r*, ſingulis vniſecundis *ar2*, ſunt æquales; *p. p.* ad quas *u*, rationes habet compoſitas ex ijſdem rationibus: quare omnes biprimæ *O.a2r*, omnibus vniſecundis *O.ar2*, ſunt æquales. Quod &c.

Hypoth. 3.

Sint ſeſquiſpecies *O.a2r*, *O.ar2*: vel ſint ſemiſpecies. Dico, *O.a2r*, *O.ar2*, eſſe æquales.

Demonſtratio.

def.22.b. Quæ ſunt vnius cuiuſquam numeri ſeſquiſpecies; ſunt alius, vnitate maioris numeri ſpecies: *ſup.* ſed ſpecies *O.a2r*, *O.ar2*, ſunt æquales: ergo ſeſquiſpecies *O.a2r*, *O.ar2*, ſunt æquales. Quod &c.

def.23.b. Item quæ ſunt vnius cuiuſquam numeri ſemiſpecies; ſunt alius, vnitate minoris numeri *ſup.* ſpecies: ſed ſpecies ſunt æquales: ergo & ſemiſpecies. Quod &c.

Dico *O.a2r*, & *O.ar2* incrementa eſſe æqualia, & decrementa æqualia.

Demonſtr.

Nam ab æqualibus ſpeciebus *O.a2r*, *O.ar2*, *ſup.* æquales demptæ ſemiſpecies homonymæ, relinquunt æqualia decrementa. Quod &c.

ſup. Et ab æqualibus ſeſquiſpeciebus, æquales

 dem-

demptæ ſpecies homonymæ, relinquunt æqualia incrementa. Quod &c.

Hypoth. 4.

Sint in tabula ſubquadratrice, in tertia baſi, ſubquadratrices, ſecunda *O.3a2r*, & penultima *O.3ar2*.

Dico *O.3a2r*, *O.3ar2*, eſſe æquales.

Demonſtr.

def. 10. *p.* Quoniam in tabula multipliciũ, in tertia baſi, ſecundus numerus 3, & penultimus 3, ex ijſdem vtrimque vnitatibus, & numeris aggregati, ſunt æquales: æquemultiplicant ſpecies æquales, *O.a2r*, *O.ar2*; & ſubquadratrices producunt *ſup. def.* 12. *h.* æquales, *O.3a2r*, *O.3ar2*. Quod &c.

Vnde patet, quod & ſeſquiſubquadratrices ſunt æquales; & ſemiſubquadratrices æquales; & ſubquadratricum æqualia ſunt incrementa; & æqualia decrementa. Quæ &c.

Hypoth. 5.

Sint denique in tabula quadratrice, in tertia baſi, quadratrices, ſecunda *O.12a2r*, & penultima *O.12ar2*.

Dico, *O.12a2r*, & *O.12ar2*, eſſe æquales.

Demonſtr.

def. 13. *h.* Cum ſint enim æqualium ſubquadratricum æquemultiplices; inter ſe ſũt æquales. Quod &c.

Vnde conſtat, quod & ſeſquiquadratrices ſunt æquales; & ſemiquadratrices æquales; & quadratricum æqualia ſunt incrementa; & æqualia decrementa. Quæ &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 2. Prop. 2.

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, in duobus quibuſque lateribus, vna ſpecies, habet pro incremento, maſſas aggregatas, in vtrolibet latere, ſi quæ ſunt præcedentes, atque totam vnitate minùs ordinatam, quàm ſit ipſum latus: maſſas inquam, multiplicatas per numeros tabulæ multiplicium, in baſi acceptos, vnitate minùs ordinata, quàm ſit alterum latus.

Hypoth. 1.

Eſto in tabula ſpecioſa, in primo, & in quintultimo latere, ſpecies *O.a*4: quam in quintultimo latere primam, nullæ ſpecies præcedunt: & eſto quarta tota *t*4.

Dico *O.a*4, incrementum eſſe *t*4.

Demonſtrat.

Eædem abſciſſiones totæ, quibus vnitas, binarius, & deinceps abſcinduntur; etiam ſeſquitotæ, ſunt abſciſſiones: & eædem vtrarumque ſunt abſciſſæ; necnon abſciſſæ quartæ. Sed præter abſciſſiones totæ, vna eſt vlterior abſciſſio ſeſquitotæ, qua ipſa tota abſcinditur: & pro qua poſt abſciſſas quartas totæ, & ſeſquitotę communes, accedit tota quarta, ſeſquitotæ propria: quæ ſpeciei *O. a*4, eſt incremẽtum, ad ſeſquiſpeciem componendam. Quod &c.

def. 18 *h.*

def. 26 *h.*

Hypoth. 2.

Eſto in tabula ſpecioſa, in quarto, & in vltimo latere, ſpecies *O. r*3: quam in vltimo latere

quar-

quartam, ſpecies præcedunt, tertia *O.r2*, ſecunda *O.r*; prima *O.u*: & eſto tota vnitate minùs ordinata, quàm ſit vltimum latus: quæ profectò, in
def. 7. p. ordine continuè proportionalium totarum, eſt
def. 7. 2. ipſa rationalis, atq; vnitas *u*. Et quoniam *O.r3*, eſt & in quarto latere, ſumatur baſis tabulæ multiplicium, vnitate minùs ordinata, nempe tertia, cuius numeri 3, 3.

Dico *O.r3*, incrementum eſſe, *O.3r2* + *O.3r* + *O.u* + *u*.

Demonſtr.

Eædem abſciſſiones, totæ ſunt, & ſeſquitotæ: pro quibus vna pars incrementi *O.r3* taxabitur. Præter abſciſſiones totæ, vna eſt vlterior abſciſſio ſeſquitotæ, pro qua pars altera eiuſdem incrementi taxabitur. Rurſum prima pars incrementi, tot ex partibus componitur, quot ſunt abſciſſiones, totæ, & ſeſquitotæ communes.

Eſt autem pro vna abſciſſione, totæ, & ſeſquitotæ, communi, eadem quidem abſciſſa, ſed non eadem reſidua. Cumque totæ reſidua eſt *r*, ſeſquitotæ reſidua eſt *r* + *u*: quoniam & ipſa ſeſquitota vnitate maior eſt, quàm tota. Cum er-
8. p. go totæ reſidua tertia eſt *r3*; ſeſquitotæ eſt, *r3* + *3r2u* + *3ru2* + *u3*. Et quoniam ratio æqualitatis, quantumlibet multiplicata, ſemper eſt ca-
7. 5. dem: & quantumlibet compoſita, non variat rationes, quibuſcum componitur: huiuſmodi autem

tem

des. p. p. tem eſt u ad u, ad $u2$, ad $u3$: eadem ergo quantitas eſt $u3$, atque u: & $3ru2$, quæ $3r$: & $3r2u$, quæ $3r2$: & $r3 + 3r2u + 3ru2 + u3$, quæ $r3 + 3r2 + 3r + u$: & ſeſquitotæ reſidua tertia, eſt $r3 + 3r2 + 3r + u$. Sed totæ reſidua tertia, eſt $r3$: ergo cuiuſque reſiduæ incrementum eſt $3r2 + 3r + u$. Et omnium reſiduarum, ideſt, $O.r3$, omnia incrementa ſunt $O.3r2 + O.3r + O.u$: totidem, quot ſunt abſciſſiones communes, totæ, & ſeſquitotæ: & pars prima incrementi taxanda.

Pro vlteriori abſciſſione propria ſeſquitotæ, tota fit abſciſſa, cuius reſidua vnitas: & maſſæ $O.r3$, vlterior reſidua fit $u3$, ideſt u: pars altera incrementi taxanda. Quibus ex partibus, totum componitur incrementũ ſpeciei $O.r3$, quod eſt, $O.3r2 + O.3r + O.u + u$. Quod &c.

Hypoth. 3.

Eſto in tabula ſpecioſa, in quarto, & in quintultimo latere, ſpecies $O.a4r3$: quam in quintultimo latere præcedunt ſpecies, $O.a4r2$, $O.a4r$, $O.a4$: & eſto tota $t4$, vnitate minùs ordinata, quàm ſit latus quintultimum: & eſto baſis tertia multiplicium, vnitate minùs ordinata, quàm ſit latus quartum; in qua baſi, numeri ſunt 3, & 3.

Dico $O.a4r3$, incrementum eſſe, $O.3a4r2 + O.3a4r + O.a4 + t4$.

De-

Demonſtr.

Pro communibus enim totæ, & ſeſquitotæ abſciſſionibus; vna eſt pars incrementi: & pro abſciſſione vlteriori, propria ſeſquitotæ; eſt altera. Et prioris partis incrementi, tot ſunt particulæ, quot ſunt abſciſſiones communes; nempè, quot abſciſſæ, quot reſiduæ, quot quadritertiæ: & ſingulæ particulæ, ſingula ſunt increméta quadritertiarum totæ, ad componendas quadritertias ſeſquitotæ.

Porrò totæ, & ſeſquitotæ, pro eadem abſciſſione, eadem eſt abſciſſa; ſed non eadem reſidua: & eadem eſt abſciſſa quarta; ſed non eadem reſidua tertia. cumque reſidua tertia totæ, eſt $r3$; reſidua tertia ſeſquitotæ, eſt $r3 + 3r2 + 3r + u$: & cum quadritertia totæ, eſt $a4r3$; quadritertia ſeſquitotæ eſt $a4r3 + 3a4r2 + 3a4r + a4$: & incrementum quadritertiæ, totæ, ad componendam quadritertiam ſeſquitotæ, eſt $3a4r2 + 3a4r + a4$. Et omnia ſimul incrementa quadritertiarum totæ, ad componendas omnes quadritertias ſeſquitotę, ſunt $O.3a4r2 + O.3a4r + O.a4$, prior pars incrementi $O.a4r3$.

ſup.

Pro vlteriori abſciſſione propria ſeſquitotę, abſciſſa eſt t, reſidua u: & abſciſſa quarta $t4$, reſidua tertia $u3$: & quadritertia vlterior propria ſeſquitotæ, eſt $t4u3$, vel $t4$: & eſt poſterior pars incrementi $O.a4r3$. Ex quibus partibus integrum componitur incrementum $O.a4r3$, quod eſt,

ſup.

$O.3a4r2$

$O.\,3a4r2 + O.3a4r + O.\,a4 + t4$. Quod &c.

Hypoth. 4.

Eſto in tabula ſpecioſa, in quinto, & in quartultimo latere, ſpecies $O.\,a3r4$: quam in quinto latere, prçcedũt ſpecies, $O.\,a2\,r4$, $O.\,ar4$, $O.\,r4$: & eſto tota $t4$, vnitate minùs ordinata, quàm ſit latus quintum : & eſto baſis tertia multiplicium, vnitate minùs ordinata, quàm ſit latus quartultimum; in qua baſi ſunt numeri $3, 3$.

Dico $O.\,a3r4$, incrementum eſſe, $O.\,3a2r4 + O.\,3ar4$, $+ O.r4 + t4$.

Demonſt.

$O.3a4r2 : O.3a2r4$.
$O.3a4r : O.3ar4$.
p. h. $O.a4 : O.r4$.
$O.\,3a4r2 + O.\,3a4r + O.a4 : O.\,3a2r4 + O.\,3ar4 + O.r4$.
p. h. Sed $O.a4r3$, & $O.a3r4$ æqualia ſunt incremẽta: & eſt $O.\,a4r3$ incrementum $O.3a4r2 +$
ſup. $O.3a4r + O.a4 + t4$. Ergo etiam $O.\,a3r4$ incrementum eſt $O.3a2r4 + O.3ar4 + O.r4 + t4$. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 3. *Prop.* 3.

IN tabula ſpecioſa, cuiuſque numeri, in duobus quibuſque lateribus, vna ſpecies, habet pro decremento, maſſas in vno latere præcedentes, multiplicatas per numeros

tabulæ multiplicium, in baſi acceptos, vnitate minùs ordinata, quàm ſit alterum latus: proximam quidem maſſam, & alternas aggregatas; reliquas verò ſubtractas. Sed ſi nullæ ſunt præcedentes; quòd ſpecies in ipſo latere ſit prima: pro decremento, habet ſemitotam, vnitate minùs ordinatam, quàm ſit alterum latus.

Hypoth. 1.

Eſto in tabula ſpecioſa, in quinto, & in quartultimo latere, ſpecies O.$a3r4$, quam præcedentes, in quartultimo latere, ſunt ſpecies, O.$a3r3$, O.$a3r2$, O.$a3r$, O.$a3$: quartæ autem baſis tabulæ multipliciũ ſint numeri 4, 6, 4.

Dico ſpeciei O.$a3r4$, decrementum eſſe O.$4a3r3$ — O.$6a3r2$ + O.$4a3r$ — O.$a3$.

Demonſtr.

def. 19. h — Eædem abſciſſiones, quibus vnitas, binarius, & deinceps abſcinduntur, etiam ſemitotæ ſunt abſciſſiones; præter vnam propriam totæ, qua ipſa abſcinditur ſemitota, & vnitas relinquitur.

Quantum ad communes attinet abſciſſiones, cum eædem ſint abſciſſæ, totæ, & ſemitotæ; non eædem ſunt reſiduæ: cumque totæ reſidua ſit r; ſemitotæ reſidua eſt $r - u$: & cum totæ reſidua

10. p. — quarta, ſit $r4$; ſemitotæ reſidua quarta eſt $r4 - 4r3 + 6r2 - 4r + u$: cum deniq; totæ triquarta ſit $a3r4$; ſemitotæ triquarta eſt $a3r4 - 4a3r3 + 6a3r2 - 4a3r + a3$.

Quantum ad non communem attinet abſciſſionem, ſi reſi-

reſida vnitas, vnitate minuatur, profectò nihil remanet: eritque r quidem, vnitas; ſed $r - u$, nihil: & erit $r4$, vnitas; ſed $r4 - 4r3 + 6r2 - 4r + u$, nihil: & triquarta quidem totæ, erit $a3r4$; ſed ſemitotæ alia vlterior quaſi triquarta $a3r4 - 4a3r3 + 6a3r2 - 4a3r + a3$, nihil. Ideoque perinde eſt, proprias computare ſemitotę triquartas, pro communibus; atque vnam amplius adijcere triquartam nullam, pro non communi abſciſſione. Quare omnes triquartę, ſemitotę, ſunt $O.a3r4 - O.4a3r3 + O.6a3r2 - O.4a3r + O.a3$; reuera pauciores, quàm ipſius totæ ſunt abſciſſiones; ſed perinde æquales, atque ſi totidem numerarentur. Totæ autem, triquartæ omnes, ſunt $O.a3r4$; reuera totidem, quot ſunt eius abſciſſiones. Et vtrarumque differentia, $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O\,a3$, eſt decrementũ ſpeciei $O.a3r4$. Quod &c.

Hypoth. 2.

Eſto in tabula ſpecioſa, in quarto, & in quintultimo latere, ſpecies $O.a4r3$: quam præcedentes in quarto latere, ſunt ſpecies, $O\,a3r3$, $O.a2r3$, $O\,ar3$, $O.r3$: quartæ autem baſis tabulæ multiplicium, numeri ſunt 4, 6, 4.

Dico ſpeciei $O.a4r3$, decrementum eſſe $O.4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$.

Demonſtr.

p. h. | $O.6a3r2 : O.6a2r3$.
| $O.4a3r : O.4ar3$.
| $O.a3 : O.r3$.
| $O.4a3r3 - O.6a3r2 + O.4a3r - O.a3 : O.$

$4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$.

p. b. Sed $O.a3r4$, & $O.a4r3$, decrementa ſunt æ-

ſup. qualia : & eſt $O.a3r4$, decrementum $O.4a3r3 - 6a3r2 + O.4a3r - O.a3$: ergo etiam $O.a4r3$, decrementum eſt $O.4a3r3 - O.6a2r3 + O.4ar3 - O.r3$. Quod &c.

Hypoth. 3.

Eſto in quartultimo latere, prima ſpecies $O.a3$: & eſto ſemitota tertia $m3$.

Dico, decrementum $O.a3$, eſſe $m3$.

Demonſtr.

Pro communibus enim totæ, & ſemitotæ abſciſſionibus, eædem vtrarumq; ſunt abſciſſæ, & in propoſita ſpecie $O.a3$, reſiduæ nullæ : pro vlteriori verò abſciſſione, totæ propria, vltima eſt abſciſſa, vnitate minor, quàm tota, id-eſt, ſemitota m : & vltima abſciſſa tertia, propria totæ, eſt $m3$. Quare ſpeciei $O.a3$, decrementũ eſt $m3$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. *Prop.* 4.

TOta quælibet, eſt æqualis, aggregatis omnibus minùs ordinatarum abſciſſarum ſpeciebus, & vnitati, acceptis ſecundum numeros multiplices, in baſi ſibi æque-ordinata iacentes.

Hypoth.

Eſto tota quinta $t5$; qua minùs ordinatæ abſciſſæ, $a4$, $a3$, $a2$, a, u; quarum ſpecies, $O.a4$, $O.a3$, $O.a2$, $O.a$,

O.u: & eſto baſis quinta multiplicium, cuius numeri, 5, 10, 10, 5.

Dico *t*5 : *O*. 5*a*4 + *O*. 10*a*3 + *O*. 10*a*2 + *O*. 5*a* + *O*. *u* + *u*.

Demonſtratio.

p. h. | O.*a*5, & O.*r*5, æqualia ſunt incrementa: quorum alterum, *t*5; alterum, O. 5*a*4 + O. 10*a*3
2. h. | + O. 10*a*2 + O. 5*a* + O.*u* + *u*. Quòd &c.
| Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

DEmonſtrare, qualiter acceptis totis, quæque maſſa eſt æqualis.

Methodus Demonſtrationis.

Oportet in demonſtrando, procedere, à prioribus baſibus tabulæ ſpecioſæ, ad poſteriores; & in ſingulis baſibus, ab exterioribus ſpeciebus, ad interiores.

| Porrò in ſingulis baſibus, pro prima, & vltima ſpecie, vna eſt demonſtratio; item pro ſecunda, & penultima; pro tertia, & tritultima. Nam, verbi gratia, ſecunda, qualiter acceptis totis demonſtrabitur æqualis; taliter acceptis, æqualis erit etiã penultima: quia conſtat, ſecundam, & penulti-
p. h. | mam, eſſe æquales.

Sub hoc vno titulo, theoremata conueniunt innumerabilia: cum enim tabula ſpecioſa, ſit producibilis in infinitum, habet maſſas innumerabiles; ideſt, ſemper plures,

quàm

quàm quot quiſque aſſignauerit.

Vna tamen eſt omnium communis methodus demonſtrandi, & duo ſunt argumenta: vnum, ab æqualibus cuiuſdam ſpeciei incrementis; alterum ab æqualibus decrementis.

Pro vlteriori methodi ennarratione, dabimus triginta ſex theoremata; quæ ſufficiunt, pro vertice, & baſibus tabulæ ſpecioſæ, vſque ad decimam incluſiuè: quædam demonſtrata per vtrumque argumentum; quædam ſolùm per alterum; quædam denique ſine demonſtratione.

1. O.*u*: *t*—*u*.

Demonſtr. 1.

4. *h*.	O.*u* + *u*: *t*.
	O.*u*: *t*—*u*. Quod &c.

Demonſtr. 2.

	O. *a*. decrementa ſunt æqualia.
3. *h*.	O.*u*: *m*.
def. 19. *h*.	*m*: *t*—*u*.
	O.*u*: *t*—*u*. Quod &c.

---

2. O.2*a*: *t*2—*t*.

Demonſtr. 1.

4. *h*.	O. 2*a* + O.*u* + *u*: *t*2.
	O. 2*a*: *t*2 — O.*u*—*u*.
ſup. 1.	O.*u*: *t*—*u*.
p. *h*.	O. 2*a*: *t*2—*t*. Quod &c.

De-

Demonſtr. 2.

	O.$a2$, decrementa ſunt æqualia.
3. *h.*	O. $2a$ — Ou: $m2$.
	O. $2a$: $m2$ + O.u.
def. 21.*h.*	$m2$: $t2$ — $2t$ + u.
ſup.p.	O. u: t — u.
	O. $2a$: $t2$ — t. Quòd &c.

3. O.$6a2$: $2t3$ — $3t2$ + t.

Demonſtr. 1.

4. *h.*	O. $3a2$ + O.$3a$ + O.u + u : $t3$.
	O.$6a2$ + O. $6a$ + O. $2u$ + 2 : $2t3$.
	O.$6a2$: $2t3$ — O.$6a$ — O. $2u$ — u.
ſup. 2.	O.$6a$: $3t2$ — $3t$.
ſup. p.	O.$2u$: $2t$ — 2.
	O.$6a2$: $2t3$ — $3t2$ + t. Quod &c.

Demonſtr. 2.

	O.$a3$, decrementa ſunt æqualia.
3. *h.*	O.$3a2$ — O.$3a$ + O.u: $m3$.
	O.$6a2$ — O.$6a$ + O.$2u$: $2m3$.
	O.$6a2$: $2m3$ + O.$6a$ — O. $2u$.
*def.*21.*h*	$2m3$: $2t3$ — $6t2$ + $6t$ — 2.
ſup. 2.	O.$6a$: $3t2$ — $3t$.
ſup. p.	O.$2u$: $2t$ — 2.
	O.$6a2$: $2t3$ — $3t2$ + t. Quod &c.

4. $O.6ar : t3 --- t.$

Demonſtr. 1.

	$O.a2r$, incrementa ſunt æqualia.
2. *h.*	$O.2ar + Or + t : O.a2 + t2.$
	$O.12ar + O.6r + 6t : O.6a2 + 6t2.$
	$O.12ar : O.6a2 --- O.6r + 6t2 --- 6t.$
ſup. 3.	$O.6a2 : 2t3 --- 3t2 + t.$
ſup. 2.	$O.6r : 3t2 --- 3t.$
	$O.12ar : 2t3 --- 2t.$
	$O.6ar : t3 --- t.$ Quod &c.

Demonſtr. 2.

	$O.a2r$, decrementa ſunt æqualia.
3. *h.*	$O.2ar --- O.r : O.a2.$
	$O.12ar --- O.6r : O.6a2.$
	$O.12ar : O.6a2 + O.6r.$
ſup. 3.	$O.6a2 : 2t3 --- 3t2 + t.$
ſup. 2.	$O.6r : 3t2 --- 3t.$
	$O.12ar : 2t3 --- 2t.$
	$O.6ar : t3 --- t.$ Quod &c.

---

5. $O.4a3 : t4 --- 2t3 + t2.$

Demonſtr.

4. *h.*	$O.4a3 + O.6a2 + O.4a + O.u + u : t4.$
ſup. p.	$O.u : t --- u.$
ſup. 2.	$O.4a : 2t2 --- 2t.$
ſup. 3.	$O.6a2 : 2t3 --- 3t2 + t.$

O.4a3 + 2t3 --- t2 : t4.
O.4a3 : t4 --- 2t3 + t2. Quòd &c.

---

6. O.12a2r : t4 --- t2. *Demonſt.1.*

O.a3r, incrementa ſunt æqualia.
2. h. O.3a2r + O.3ar + O.r + t : O.a3 + t3.
O.12a2r + O.12ar + O.4r + 4t : O.4a3 + 4t3.
ſup. 4. & 2. O.12ar : 2t3 --- 2t. O.4r : 2t2 --- 2t.
ſup 5. O.4a3 : t4 --- 2t3 + t2.
O.12a2r + 2t3 + 2t2 : t4 + 2t3 + t2.
O.12a2r : t4 --- t2. Quod &c. *Demonſt.2.*

O.a3r, decrementa ſunt æqualia.
3. h. O.3a2r --- O.3ar + O.r : O.a3.
O.12a2r --- O.12ar + O.4r : O.4a3.
ſup. 4. O.12ar : 2t3 --- 2t.
ſup. 2. O.4r : 2t2 --- 2t.
ſup. 5. O.4a3 : t4 --- 2t3 + t2.
O.12a2r --- 2t3 + 2t2 : t4 --- 2t3 + t2.
O.12a2r : t4 --- t2. Quod &c.

---

7. O.30a4 : 6t5 --- 15t4 + 10t3 --- t.

Demonſtr.

4. h. O.5a4 + O.10a3 + O.10a2 + O.5a + O.u + u : t5.
O.60a4 + O.120a3 + O.120a2 + O.60a + O.12u
ſup. 2. + 12 : 12t5. O.60a : 30t2 --- 30t.
ſup. 3. O.120a2 : 40t3 --- 60t2 + 20t.
ſup. 5. O.120a3 : 30t4 --- 60t3 + 30t2.

ſup. p. | O.12u : 12t --- 12.
| O.60a4+30t4 --- 20t3+2t : 12t5.
| O.30a4+15t4 --- 10t3+t : 6t5.
| O.30a4 : 6t5 --- 15t4+10t3 --- t. Quod &c.

---

8. O.60a3r : 3t5 --- 5t3+2t.

Demonſtr.

| O.a4r, decrementa ſunt æqualia.
3. b. | O.4a3r --- O.6a2r +O.4ar --- Or : O.a4.
| O.120 a3 r --- O.180 a2r + O.120 ar --- O.30 r : O.30a4.
ſup. 6. | O.180a2r : 15t4 --- 15t2.
ſup. 4. | O.120ar : 20t3 --- 20t.
ſup. 2. | O.30r : 15t2 --- 15t.
ſup. 7. | O.30a4 : 6t5 --- 15t4+10t3 --- t.
| O.120a3r --- 15t4 + 20t3 --- 5t : 6t5 --- 15t4+ 10t3 --- t.
| O.120a3r : 6t5 --- 10t3+4t.
| O.60a3r : 3t5 --- 5t3+2t. Quod &c.

---

9. O.30a2r2 : t5 --- t.

Demonſtr.

| O.a3r2, decrementa ſunt æqualia.
3. b. | O.3a2r2 --- O.3ar2+O.r2 : O.2a3r --- O.a3.
| O.180a2r2 --- 180ar2 + O.60r2 : O.120 a3r+ O.60a3.
ſup. 6. | O.180ar2 : 15t4 --- 15t2.

O.60r2:

ſup.3. | 0.60r2 : 20t3 — 30t2 + 10t.
ſup.8. | 0.120a3r : 6t5 — 10t3 + 4t.
ſup.5. | 0.60a3 : 15t4 — 30t3 + 15t2.
| 0.180a2r2 — 15t4 + 20t3 — 15t2 + 10t : 6t5.
— | — 15t4 + 20t3 — 15t2 + 4t.
| 0.180a2r2 : 6t5 — 6t.
| 0.30a2r2 : t5 — t. Quod &c.

---

10. 0.12a5 : 2t6 — 6t5 + 5t4 — t2.
11. 0.60a4r : 2t6 — 5t4 + 3t2.
12. 0.60a3r2 : t6 — t2.
13. 0.42a6 : 6t7 — 21t6 + 21t5 — 7t3 + t.
14. 0.84a5r : 2t7 — 7t5 + 7t3 — 2t.
15. 0.210a4r2 : 2t7 — 7t3 + 5t.
16. 0.420a3r3 : 3t7 + 7t3 — 10t.
17. 0.24a7 : 3t8 — 12t7 + 14t6 — 7t4 + 2t2.
18. 0.168a6r : 3t8 — 14t6 + 21t4 — 10t2.
19. 0.168a5r2 : t8 — 7t4 + 6t2.
20. 0.840a4r3 : 3t8 + 7t4 — 10t2.
21. 0.90.a8 : 10t9 — 45t8 + 60t7 — 42t5 + 20t3
— 3t.
22. 0.360a7r : 5t9 — 30t7 + 63t5 — 50t3 + 12t.
23. 0.1260a6r2 : 5t9 — 63t5 + 100t3 — 42t.
24. 0.2520a5r3 : 5t9 + 21t5 — 110t3 + 84t.
25. 0.630a4r4 : t9 + 20t3 — 21t.
26. 0.20a9 : 2t10 — 10t9 + 15t8 — 14t6 + 10t4
— 3t2.

27. *O.180a8r : 2t10 — 15t8+42t6 — 50t4+21t2.*
28. *O.360a7r2 : t10 — 21t6 + 50t4 — 30t2.*
29. *O.840a6r3 : t10+7t6 — 50t4+42t2.*
30. *O.1260a5r4 : t10+20t4 — 21t2.*
31. *O.66a10 : 6t11 — 33t10+55t9 — 66t7+66t5 — 33t3+5t.*
32. *O.660a9r : 6t11 — 55t9+198t7 — 330t5+231t3 — 50t.*
33. *O.990a8r2 : 2t11 — 66t7+220t5 — 231t3+75t.*
34. *O.1320a7r3 : t11+11t7 — 110t5+198t3 — 100t.*
35. *O.2310a6r4 : t11+55t5 — 231t3+175t.*
36. *O2772a5r5 : t11 — 22t5+231t3 — 210t.*

Et in infinitum, eadem methodo ſupra tradita, poteſt demonſtrari, qualiter acceptis totis, quæque maſſa eſt æqualis.

Theor. 6. Prop. 6.

DEmonſtrare, qualiter acceptis ſemitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

Meth. Demonſtr.

Oportet præſupponere theoremata demonſtrata in præcedenti, ſua cuiuſque maſſæ propria: deinde totas reſoluere in ſemitotas, per *def.* 19.*h.* & per 8.*p.* vt ſequitur.

t : m+n.

t2 : m2+2m+n.

$t3 : m3 + 3m2 + 3m + u.$

$t4 : m4 + 4m3 + 6m2 + 4m + u.$

$t5 : m5 + 5m4 + 10m3 + 10m2 + 5m + u.$

$t6 : m6 + 6m5 + 15m4 + 20m3 + 15m2 + 6m + u.$

$t7 : m7 + 7m6 + 21m5 + 35m4 + 35m3 + 21m2 + 7m + u.$

$t8 : m8 + 8m7 + 28m6 + 56m5 + 70m4 + 56m3 + 28m2 + 8m + u.$

$t9 : m9 + 9m8 + 36m7 + 84m6 + 126m5 + 126m4 + 84m3 + 36m2 + 9m + u.$

$t10 : m10 + 10m9 + 45m8 + 120m7 + 210m6 + 252m5 + 210m4 + 120m3 + 45m2 + 10m + u.$

$t11 : m11 + 11m10 + 55m9 + 165m8 + 330m7 + 462m6 + 462m5 + 330m4 + 165m3 + 55m2 + 11m + u.$

Vnde, pro triginta ſex theorematis propoſitis in præcedenti, & demonſtrabilibus, alia triginta ſex proponemus, in præſenti, demonſtrabilia, videlicet.

1. $O.u : m.$
2. $O.2a : m2 + m.$
3. $O.6a2 : 2m3 + 3m2 + m.$
4. $O.6ar : m3 + 3m2 + 2m.$
5. $O.4a3 : m4 + 2m3 + m2.$
6. $O.12a2r : m4 + 4m3 + 5m2 + 2m.$
7. $O.30a4 : 6m5 + 15m4 + 10m3 - m.$
8. $O.60a3r : 3m5 + 15m4 + 25m3 + 15m2 + 2m.$

9. O.

9. *O.30a2r2 : m5 + 5m4 + 10m3 + 10m2 + 4m.*
10. *O.12a5 : 2m6 + 6m5 + 5m4 — m2.*
11. *O.60a4r : 2m6 + 12m5 + 25m4 + 20m3 + 3m2 — 2m.*
12. *O.60a3r2 : m6 + 6m5 + 15m4 + 20m3 + 14m2 + 4m.*
13. *O.42a6 : 6m7 + 21m6 + 21m5 — 7m3 + m.*
14. *O.84a5r : 2m7 + 14m6 + 35m5 + 35m4 + 7m3 — 7m2 — 2m.*
15. *O.210a4r2 : 2m7 + 14m6 + 42m5 + 70m4 + 63m3 + 21m2 — 2m.*
16. *O.420a3r3 : 3m7 + 21m6 + 63m5 + 105m4 + 112m3 + 84m2 + 32m.*
17. *O.24a7 : 3m8 + 12m7 + 14m6 — 7m4 + 2m2.*
18. *O.168a6r : 3m8 + 24m7 + 70m6 + 84m5 + 21m4 — 28m3 — 10m2 + 4m.*
19. *O.168a5r2 : m8 + 8m7 + 28m6 + 56m5 + 63m4 + 28m3 — 8m2 — 8m.*
20. *O.840a4r3 : 3m8 + 24m7 + 84m6 + 168m5 + 217m4 + 196m3 + 116m2 + 32m.*
21. *O.90a8 : 10m9 + 45m8 + 60m7 — 42m5 + 20m3 — 3m.*
22. *O.360a7r : 5m9 + 45m8 + 150m7 + 210m6 + 63m5 — 105m4 — 50m3 + 30m2 + 12m.*
23. *O.1260a6r2 : 5m9 + 45m8 + 180m7 + 420m6 + 567m5 + 315m4 — 110m3 — 150m2 — 12m.*
24. *O.2520a5r3 : 5m9 + 45m8 + 180m7 + 420m6 +*

651m5

651m5+735m4+520m3+60m2—96m.

25. 0.630a4r4:m9+9m8+36m7+84m6+126m5
+126m4+104m3+96m2+48m.

26. 0.20a9:2m10+10m9+15m8—14m6+10m4
—3m2.

27. 0.180a8r:2m10+20m9+75m8+120m7+42m6
—84m5—50m4+40m3+21m2—6m.

28. 0.360a7r2:m10+10m9+45m8+120m7+
189m6+126m5—55m4—100m3+24m.

29. 0.840a6r3:m10+10m9+45m8+120m7+
217m6+294m5+265m4+60m3—108m2—
64m.

30. 0.1260a5r4:m10+10m9+45m8+120m7+
210m6+252m5+230m4+200m3+144m2+
48m.

31. 0.66a10:6m11+33m10+55m9—66m7+
66m5—33m3+5m.

32 0.660a9r:6m11+66m10+275m9+495m8+
198m7—462m6—330m5+330m4+231m3
—99m2—50m.

33. 0.990a8r2:2m11+22m10+110m9+330m8+
594m7+462m6—242m5—550m4—11m3
+231m2+42m.

34. 0.1320a7r3:m11+11m10+55m9+165m8+
341m7+539m6+583m5+165m4—352m3
—220m2+32m.

35. 0.2310a6r4:m11+11m10+55m9+165m8+

$330m7+462m6+517m5+605m4+484m3-88m2-232m.$

36. $O.2772a5r5 : m11+11m10+55m9+165m8+330m7+462m6+440m5+220m4+176m3+528m2+384m.$

Sicut autem poſſibile eſt, vltra decimam baſim ſpecioſæ tabulæ, in demonſtrando procedere, in præcedenti; & oſtændere, qualiter accepis totis quæque maſſa eſt æqualis: ita poſſibile eſt in præſenti procedere; & demonſtrare, qualiter acceptis ſemitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

Theor. 7. Prop. 7.

Demonſtrare, qualiter acceptis ſeſquitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

Meth. Demonſtr.

Oportet præſupponere theoremata, demonſtrata ſub titulo *prop.* 5. *h.* ſua cuiuſque propria: deinde totas reſoluere in ſeſquitotas per *def.* 18. *h.* & per 10. *p.* vt ſequitur.

$t : q - u.$

$t2 : q2 - 2q + u.$

$t3 : q3 - 3q2 + 3q - u.$

$t4 : q4 - 4q3 + 6q2 - 4q + u.$

$t5 : q5 - 5q4 + 10q3 - 10q2 + 5q - u.$

$t6 : q6 - 6q5 + 15q4 - 20q3 + 15q2 - 6q + u.$

$t7 : q7 - 7q6 + 21q5 - 35q4 + 35q3 - 21q2 + 7q - u.$

$t8 : q8 - 8q7 + 28q6 - 56q5 + 70q4 - 56q3 + 28q2 - 8q + u.$

$\varepsilon 9 : q9 - 9q8 + 36q7 - 84q6 + 126q5 - 126q4 + 84q3 - 36q2 + 9q - u.$

$\varepsilon 10 : q10 - 10q9 + 45q8 - 120q7 + 210q6 - 252q5 + 210q4 - 120q3 + 45q2 - 10q + u.$

$\varepsilon 11 : q11 - 11q10 + 55q9 - 165q8 + 330q7 - 462q6 + 462q5 - 330q4 + 165q3 - 55q2 + 11q - u.$

Vnde, pro triginta ſex theorematis, propoſitis in 5.*h.* alia triginta ſex proponemus, in præſenti, demonſtrabilia, videlicet.

1. $O.u : q - 2.$
2. $O.2a : q2 - 3q + 2.$
3. $O.6a2 : 2q3 - 9q2 + 13q - 6.$
4. $O.6ar : q3 - 3q2 + 2q.$
5. $O.4a3 : q4 - 6q3 + 13q2 - 12q + 4.$
6. $O.12a2r : q4 - 4q3 + 5q2 - 2q.$
7. $O.30a4 : 6q5 - 45q4 + 130q3 - 180q2 + 119q - 30.$
8. $O.60a3r : 3q5 - 15q4 + 25q3 - 15q2 + 2q.$
9. $O.30a2r2 : q5 - 5q4 + 10q3 - 10q2 + 4q.$
10. $O.12a5 : 2q6 - 18q5 + 65q4 - 120q3 + 119q2 - 60q + 12.$
11. $O.60a4r : 2q6 - 12q5 + 25q4 - 20q3 + 3q2 + 2q.$
12. $O.60a3r2 : q6 - 6q5 + 15q4 - 20q3 + 14q2 - 4q.$
13. $O.42a6 : 6q7 - 63q6 + 273q5 - 630q4 + 833q3 - 630q2 + 253q - 42.$
14. $O.84a5r : 2q7 - 14q6 + 35q5 - 35q4 + 7q3 + 7q2 - 2q.$

15. *O.210a4r2* : 2q7 — 14q6 + 42q5 — 70q4 + 63q3 — 21q2 — 2q.

16. *O.420a3r3* : 3q7 — 21q6 + 63q5 — 105q4 + 112q3 — 84q2 + 32q.

17. *O.24a7* : 3q8 — 36q7 + 182q6 — 504q5 + 833q4 — 840q3 + 506q2 — 168q + 24.

18. *O.168a6r* : 3q8 — 24q7 + 70q6 — 84q5 + 21q4 + 28q3 — 10q2 — 4q.

19. *O.168a5r2* : q8 — 8q7 + 28q6 — 56q5 + 63q4 — 28q3 — 8q2 + 8q.

20. *O.840a4r3* : 3q8 — 24q7 + 84q6 — 168q5 + 217q4 — 196q3 + 116q2 — 32q.

21. *O.90a8* : 10q9 — 135q8 + 780q7 — 2520q6 + 4998q5 — 6300q4 + 5060q3 — 2520q2 + 717q — 90.

22. O.360*a7r* : 5q9 — 45q8 + 150q7 — 210q6 + 63q5 + 105q4 — 50q3 — 30q2 + 12q.

23. O.1260*a6r2* : 5q9 — 45q8 + 180q7 — 420q6 + 567q5 — 315q4 — 110q3 + 150q2 — 12q.

24. O.2520*a5r3* : 5q9 — 45q8 + 180q7 — 420q6 + 651q5 — 735q4 + 520q3 — 60q2 — 96q.

25. O.630*a4r4* : q9 — 9q8 + 36q7 — 48q6 + 126q5 + 126q4 + 104q3 — 96q2 + 48q.

16. *O.20a9* : 2q10 — 30q9 + 195q8 — 720q7 + 1666q6 — 2520q5 + 2530q4 — 1680q3 + 717q2 — 180q + 20

27. O.180*a8r* : 2q10 — 20q9 + 75q8 — 120q7 + 42q6 + 84q5 — 50q4 — 40q3 + 21q2 + 6q.

28. O.

28. O.36oa7r2 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 189q6 — 126q5 — 55q4 + 100q3 — 24q.

29. O.84oa6r3 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 217q6 — 294q5 + 265q4 — 60q3 — 108q2 + 64q.

30. O.126oa5r4 : q10 — 10q9 + 45q8 — 120q7 + 210q6 — 252q5 + 230q4 — 200q3 + 144q2 — 48q.

31. O.66a10 : 6q11 — 99q10 + 715q9 — 2970q8 + 7854q7 — 13860q6 + 16698q5 — 13860q4 + 7887q3 — 2970q2 + 665q — 66.

32. O.66oa9r : 6q11 — 66q10 + 275q9 — 495q8 + 198q7 + 462q6 — 330q5 — 330q4 + 231q3 + 99q2 — 50q.

33. O.99oa8r2 : 2q11 — 22q10 + 110q9 — 330q8 + 594q7 — 462q6 — 242q5 + 550q4 — 11q3 — 231q2 + 42q.

34. O.132oa7r3 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 341q7 — 539q6 + 583q5 — 165q4 — 352q3 + 220q2 + 32q.

35. O.231oa6r4 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 517q5 — 605q4 + 484q3 + 88q2 — 232q.

36. O.2772a5r5 : q11 — 11q10 + 55q9 — 165q8 + 330q7 — 462q6 + 440q5 — 220q4 + 176q3 — 528q2 + 384q.

Sicut autem poſſibile eſt,vltra decimam baſim ſpecioſę tabulæ demonſtrare, qualiter acceptis totis quæque maſſa eſt æqualis, iuxta methodum 5.h. ita poſſibile eſt, etiam in

præſenti procedere in infinitum, & demonſtrare, etiam vltra decimam baſim, qualiter acceptis ſeſquitotis, quæque maſſa eſt æqualis.

Theor. 8. Prop. 8.

DEmonſtrare, qualiter acceptis primi lateris ſpeciebus, quæque maſſa eſt æqualis.

Meth. Demonſtr.

Sub hoc vno titulo, innumerabilia theoremata cenſeri poſſent, quorum vna communis eſt methodis demonſtrandi, per 5. *h.* reſoluendo maſſas, in totas ſibi æquales; & per 4. *h.* reſoluendo totas, in ſpecies primi lateris ſibi æquales.

Pro vlteriori methodi enarratione, proponemus viginti quinque theoremata, vnum cum demonſtratione, & reliqua ſine demonſtratione: quæ poſſunt facilè demonſtrari, ſecundum methodum aſſignatam.

1. *O2ar:O.a2+O.a.*

Demonſtr.

5. *h.* | *O.6ar:t3—t.*
4. *h.* | *t3:O.3a2+O.3a+O.u+u.*
| *t:O.u+u.*
| *O.6ar:O.3a2+O.3a.*
| *O.2ar:O.a2+O.a.* Quod, &c.

2. *O.6a2r:O.2a3+O.3a2+O.a.*
3. *O.4a3r:O.a4+O.2a3+O.a2.*

4. O.

4. — O.6a2r2:O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.

5. O.30a4r:O.6a5+O.15a4+O.10a3 — O.a.

6. O.60a3r2:O.6a5+O.15a4+O.20a3+O.15a2
+O.4a.

7. O.12a5r:O.2a6+O.6a5+O.5a4 — O.a2.

8. O.30a4r2:O.2a6+O.6a5+O.10a4+O.10a3+
O.3a2 — O.a.

9. O.20a3r3:O.a6+O.7a5+O.5a4+O.5a3+O.4a2
— O.2a.

10. O.42a6r:O.6a7+O.21a6+O.21a5 — O.7a3+O.a.

11. O.84a5r2:O.4a7+O.14a6+O.28a5+O.35a4+
O.14a3 — O.7a2 — O.4a.

12. O.420a4r3:O.12a7+O.42a6+O.84a5+O.105a4
+O.98a3+O.63a2+O.16a.

13. O.24a7r:O.3a8+O.12a7+O.14a6 — O.7a4+
— O.2a2.

14. O.84a6r2:O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5+
O.21a4 — O.14a3 — O.10a2+O.2a.

15. O.168a5r3:O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5
O.49a4+O.42a3+O.4a2 — O.12a.

16. O.210a4r4:O.3a8+O.12a7+O.28a6+O.42a5+
O.42a4+O.28a3+O.32a2+O.23a.

17. O.90a8r:O.10a9+O.45a8+O.60a7 — O.42a5+
— O.20a3 — O.3a.

18. O.360a7r2: O.10a9+O.45a8+O.120a7+
O.210a6+O.126a5 — O.105a4 — O.100a3+
O.30a2+O.24a.

19. O.

19. O.840a6r3 : O.10a9 + O.45a8 + O.120a7 + O.210a6 + O.294a5 + O.315a4 + O.60a3 — O.150a2 — O.64a.

20. O.1260a5r4 : O.10a9 + O.45a8 + O.120a7 + O.210a6 + O.252a5 + O.210a4 + O.200a3 + O.165a2 + O.48a.

21. O.20a9r : O.2a10 + O.10a9 + O.15a8 — O.14a6 + O.10a4 — O.3a2.

22. O.90a8r2 : O.2a10 + O.10a9 + O.30a8 + O.60a7 + O.42a6 — O.42a5 — O50a4 + O.20a3 + O.21a2 — O.3a.

23. O.120a7r3 : O.a10 + O.5a9 + O.15a8 + O.30a7 + O.49a6 + O.63a5 + O.15a4 — O. 50a3 — O.20a2 + O.12a.

24. O.210a6r4 : O.a10 + O.5a9 + O.15a8 + O.30a7 + O.42a6 + O.42a5 + O.55a4 + O.65a3 — O.8a2 — O.37a.

25. O.252a5r5 : O.a10 + O.5a9 + O.15a8 + O.30a7 + O.42a6 + O.42a5 + O.20a4 — O.5a3 + O.48a2 + O.54a.

Aliaque poſſunt in infinitum proponi theoremata, & demonſtrari, quibus pateat, qualiter acceptis primi lateris ſpeciebus, quęque maſſa eſt æqualis.

Theor. 9. Prop. 9.

DEmonſtrare, quæ, & qualiter acceptæ totæ ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Ex

Ex innumerabilibus theorematis, quæ ſunt huius tituli, proponimus vigintiquinque: & ex his quatuor ſolūmodo demonſtramus; quæ ſufficiunt, ad oſtendendā methodum.

1\. *O.2a2+t2 : O.4ar+t.*

Demonſtr.

5\. h. | *O.6a2 : 2t3 — 3t2+t.*
| *O.6a2+3t2 — t : 2t3.*
5\. h. | *O.6ar : t3 — t.* *O.12ar : 2t3 — 2t.*
| *O.12ar+2t : 2t3.*
| *O.6a2+3t2 — t : O.12ar+2t.*
| *O.6a2+3t2 : O.12ar+3t.*
| *O.2a2+t2 : O.4ar+t.* Quod &c.

2\. *O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.*

Demonſtr.

5\. h. | *O.4a3 : t4 — 2t3+t2.* *O.4a3+2t3 — t2 : t4.*
5\. h. | *O.12a2r : t4 — t2.* *O.12a2r+t2 : t4.*
| *O.4a3+2t3 — t2 : O.12a2r+t2.*
| *O.4a3+2t3 : O.12a2r+2t2.*
| *O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.* Quod &c.

3\. *O.6a4+t4+t : O.24a3r+4t3.*

Demonſtr.

5\. h. | *O.30a4 : 6t5 — 15t4+10t3 — t.*
| *O.30a4+15t4 — 10t3+t : 6t5.*
5\. h. | *O.60a3r : 3t5 — 5t3+2t.*
| *O.60a3r+5t3 — 2t : 3t5.*

O.120a3r

5.b. | O.120a3r+10t3—4t:6t5.
| O.30a4+15t4—10t3+t:O.120a3r+10t3—4t.
| O.30a4+15t4+5t:O.120a3r+20t3.
| O.6a4+3t4+t:O.24a3r+4t3. Quod &c.

---

4. O.12a3r+t3:O.18a2r2+t.

Demonſtr.

5.b. | O.60a3r:3t5—5t3+2t.
| O.60a3r+5t3—2t:3t5.
5.b. | O.30a2r2:t5—t.
| O.30a2r2+t:t5.
| O.90a2r2+3t:3t5.
| O.60a3r+5t3—2t:O.90a2r2+3t.
| O.60a3r+5t3:O.90a2r2+5t.
| O.12a3r+t3:O.18a2r2+t. Quod, &c.

5. O.6a5+3t5+2t2:O.30a4r+5t4.
6. O.12a4r+t4:O.24a3r2+t2.
7. O6a6+3t6+4t3:O.36a5r+6t5+t.
8. O.12a5r+t5+t:O.30a4r2+2t3.
9. O.18a4r2+t3:O.24a3r3+t.
10. O.6a7+3t7+7t4:O.42a6r+7t6+3t2.
11. O.12a6r+t6+2t2:O.36a5r2+3t4.
12. O.18a5r2+t4:O.30a4r3+t2.
13. O.30a8+15t8+56t5+9t:O.80a7r+40t7+40t3.
14. O.60a7r+5t9+25t3:O.210a6r2+21t5+9t.
15. O.30a6r2+2t5+3t:O.60a5r3+5t3.

16. O.

16. *O.120a5r3+10t3:O.150a4r4+t5+9t.*
17. *O.10a9+5t9+28t6+12t2:O.90a8r+15t8+30t4.*
18. *O.60a8r+5t8+50t4:O.240a7r2+28t6+27t2.*
19. *O.90a7r2+7t6+18t2:O.210a6r3+25t4.*
20. *O.120a6r3+10t4:O.180a5r4+t6+9t2.*
21. *O.6a10+3t10+24t7+24t3:O.60a9r+10t9+36t5+5t.*
22. *O.60a9r+5t9+90t5+25t:O.270a8r2+36t7+84t3.*
23. *O.90a8r2+8t7+57t3:O.240a7r3+40t5+25t.*
24. *O.120a7r3+15t5+25t:O.210a6r4+t7+39t3.*
25. *O.30a6r4+6t3:O.36a5r5+t5+5t.*

Et alia huiuſmodi proponi poſſunt innumerabilia: quibus in ſingulis demonſtrari poterit, quæ, & qualiter acceptæ totæ, ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Theor.10.Prop.10.

DEmonſtrare, quæ, & qualiter acceptæ ſemitotæ, ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Pro innumerabilibus theorematis huius tituli, vigintiquinque proponimus, & vnum demonſtramus, ad oſtenſionem methodi.

1. *O.2a2+m2+m:O.4ar.*

H *De-*

Demonſtr.

6. h. | O.6a2 : 2m3 + 3m2 + m.
| O.6a2 — 3m2 — m : 2m3.
6. h. | O.6ar : m3 + 3m2 + 2m.
| O.12ar : 2m3 + 6m2 + 4m.
| O.12ar — 6m2 — 4m : 2m3.
| O.6a2 — 3m2 — m : O.12ar — 6m2 — 4m.
| O.6a2 : O.12ar — 3m2 — 3m.
| O.2a2 : O.4ar — m2 — m.
| O.2a2 + m2 + m : O.4ar Quod &c.

2. O.2a3 + m3 + 2m2 + m : O.6a2r.
3. O.6a4 + 3m4 + 8m3 + 6m2 + m : O.24a3r.
4. O.12a3r + m3 + 3m2 + 2m : O.18a2r2.
5. O.6a5 + 3m5 + 10m4 + 10m3 + 2m2 : O.30a4r + m.
6. O.12a4r + m4 + 4m3 + 5m2 + 2m : O.24a3r2.
7. O.6a6 + 3m6 + 12m5 + 15m4 + 4m3 : O.36a5r + 3m2 + m.
8. O.12a5r + m5 + 5m4 + 8m3 + 4m2 : O.30a4r2.
9. O.18a4r2 + m3 + 3m2 + 2m : O.24a3r3.
10. O.6a7 + 3m7 + 14m6 + 21m5 + 7m4 + m : O.42a6r + 7m3 + 3m2.
11. O.12a5r + m6 + 6m5 + 12m4 + 8m3 : O.36a5r2 + m2 + 2m.
12. O.18a5r2 + m4 + 4m3 + 5m2 + 2m : O.30a4r3.
13. O.30a8 + 15m8 + 80m7 + 140m6 + 56m5 + 20m2 + 9m : O.240a7r + 70m4 + 40m3.
14. O.60a7r + 5m7 + 35m6 + 84m5 + 70m4 :

O.210a6m

Digitized by Google

0.210a6m + 10m3 + 30m2 + 4m.

15. 0.30a6r2 + 2m5 + 10m4 + 15m3 + 5m2 : 0.60a5r3
+ 2m.

16. 0.120a5r3 + 20m2 + 16m : 0.150a4r4 + m5
+ 5m4.

17. 0.10a9 + 5m9 + 30m8 + 60m7 + 28m6 + 20m3
+ 12m2 : 0.90a8r + 42m5 + 30m4 + 3m.

18. 0.60a8r + 5m8 + 40m7 + 112m6 + 112m5 +
18m : 0.240a7r2 + 20m4 + 80m3 + 7m2.

19. 0.90a7r2 + 7m6 + 42m5 + 80m4 + 40m3 :
0.210a6r3 + 27m2 + 22m.

20. 0.120a6r3 + 20m3 + 36m2 + 16m : 0.180a5r4
+ m6 + 6m5 + 5m4.

21. 0.6a10 + 3m10 + 20m9 + 45m8 + 24m7 + 30m4
+ 24m3 : 0.60a9r + 42m6 + 36m5 + 9m2 + 5m.

22. 0.60a9r + 5m9 + 45m8 + 144m7 + 168m6 + 72m2
+ 16m : 0.270a8r2 + 36m5 + 180m4 + 24m3.

23. 0.90a8r2 + 8m7 + 56m6 + 128m5 + 80m4 + 2m :
0.240a7r3 + 63m3 + 61m2.

24. 0.120a7r3 + 40m4 + 76m3 + 12m2 : 0.210a6r4
+ m7 + 7m6 + 6m5 + 24m.

25. 0.30a6r4 + 8m2 + 8m : 0.36a5r5 + m5 + 5m4
+ 4m3.

Et omninò in qualibet baſi ſpecioſæ tabulæ, proponi, & demonſtrari poteſt, quæ, & qualiter acceptæ ſemitotę, ſpecies vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Ther. 11. *Prop.* 11.

DEmonſtrare, quæ, & qualiter acceptæ ſeſquitotæ, ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc titulo vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonſtramus, ad oſtenſionem methodi.

1. $O.2a2+q2+2 : O.3ar+3q.$

Demonſtr.

7. *b.* | $O.6a2 : 2q3 - 9q2 + 13q - 6.$
| $O.6a2+3q2+6 : 2q3 - 6q2 + 13q.$
7. *b.* | $O.6ar : q3 - 3q2 + 2q.$
| $O.12ar : 2q3 - 6q2 + 4q.$
| $O.12ar+9q : 2q3 - 6q2 + 13q.$
| $O.6a2+3q2+6 : O.12ar+9q.$
| $O.2a2+q2+2 : O.4ar+3q.$ Quod &c.

2. $O.2a3+q3+5q : O.6a2r+4q2+2.$

3. $O.6a4+3q4+30q2+6 : O.24a3r+16q3+23q.$

4. $O.12a3r+q3+2q : O.18a2r2+3q2.$

5. $O.6a5+3q5+50q3+31q : O.30a4r+20q4+58q2+6.$

6. $O.12a4r+q4+5q2 : O.24a3r2+4q3+2q.$

7. $O.6a6+3q6+75q4+93q2+6 : O.36a5r+24q5+116q3+37q.$

8. $O.12a5r+q5+8q3 : O.30a4r2+5q4+4q2.$

9. $O.18a4r2+q3+2q : O.24a3r3+3q2.$

10. O.

10. O.6a7 + 3q7 + 105q5 + 217q3 + 41q : O.42a6r + 28q6 + 203q4 + 129q^2 + 6.

11. O.12a6r + q6 + 12q4 + 2q : O.36a5r2 + 6q5 + 8q3 + q2.

12. O.18a5r2 + q4 + 5q2 : O.30a4r3 + 4q3 + 2q.

13. O.30a8 + 15q8 + 700q6 + 2170q4 + 820q2 + 30 : O.240a7r + 160q7 + 1624q5 + 1720q3 + 231q.

14. O.60a7r + 5q7 + 84q5 + 30q^2 : O.210a6r2 + 35q6 + 70q4 + 10q3 + 4q.

15. O.90a6r2 + 6q5 + 45q3 : O.180a5r3 + 30q4 + 15q2 + 6q.

16. O.120a5r3 + 5q4 + 16q : O.150a4r4 + q5 + 20q2.

17. O.10a9 + 5q9 + 300q7 + 1302q5 + 820q3 + 93q : O.90a8r + 60q8 + 812q6 + 1290q4 + 348q2 + 10.

18. O.60a8r + 5q8 + 112q6 + 80q3 : O.240a7r2 + 40q7 + 112q5 + 20q4 + 7q2 + 18q.

19. O.180a7r2 + 14q6 + 105q4 + 44q : O.420a6r3 + 84q5 + 80q3 + 54q2.

20. O.120a6r3 + 6q5 + 36q2 : O.180a5r4 + q6 + 5q4 + 20q3 + 16q.

21. O.6a10 + 3q10 + 225q8 + 1302q6 + 1230q4 + 279q^2 + 6 : O.60a9r + 40q9 + 696q7 + 1548q5.

22. O.60a9r + 5q9 + 144q7 + 180q4 + 16q : O.270a8r2 + 45q8 + 168q6 + 36q5 + 24q3 + 72q2.

23. O.90a8r2 + 8q7 + 128q5 + 61q2 + 2q : O.240a7r3 + 56q6 + 80q4 + 63q3.

24. O.

19. 0.840a6r3 : O.10a9 + O.45a8 + O.120a7 + 0.210a6 + O.294a5 + O.315a4 + O.60a3 --- O.150a2 --- O.64a.

20. 0.1260a5r4 : O.10a9 + O.45a8 + O.120a7 + O.210a6 + O.252a5 + O.210a4 + O.200a3 + O.165a2 + O.48a.

21. 0.20a9r : O.2a10 + O.10a9 + O.15a8 --- O.14a6 + O.10a4 --- 0.3a2.

22. 0.90a8r2 : O.2a10 + O.10a9 + O.30a8 + O.60a7 + 0.42a6 --- 0.42a5 --- 050a4 + 0.20a3 + 0.21a2 --- O.3a.

23. 0.120a7r3 : O.a10 + O.5a9 + O.15a8 + O.30a7 + O.49a6 + O.63a5 + O.15a4 --- O. 50a3 --- 0.20a2 + O.12a.

24. 0.210a6r4 : O.a10 + O.5a9 + O.15a8 + O.30a7 + O.42a6 + O.42a5 + O.55a4 + O.65a3 --- 0.8a2 --- O.37a.

25. 0.252a5r5 : O.a10 + O.5a9 + O.15a8 + O.30a7 + O.42a6 + O.42a5 + O.20a4 --- O.5a3 + 0.48a2 + 0.54a.

Aliaque poſſunt in infinitum proponi theoremata, & demonſtrari, quibus pateat, qualiter acceptis primi lateris ſpeciebus, quęque maſſa eſt æqualis.

Theor. 9. Prop. 9.

DEmonſtrare, quæ, & qualiter acceptæ totæ ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Ex

Ex innumerabilibus theorematis, quæ ſunt huius tituli, proponimus vigintiquinque: & ex his quatuor ſolũmodo demonſtramus; quæ ſufficiunt, ad oſtendendã methodum.

1. *O.2a2+t2 : O.4ar+t.*

Demonſtr.

5. b. | *O.6a2 : 2t3 — 3t2+t.*
| *O.6a2+3t2 — t : 2t3.*
5. b. | *O.6ar : t3 — t.* *O.12ar : 2t3 — 2t.*
| *O.12ar+2t : 2t3.*
| *O.6a2+3t2 — t : O.12ar+2t.*
| *O.6a2+3t2 : O.12ar+3t.*
| *O.2a2+t2 : O.4ar+t.* Quod &c.

---

2. *O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.*

Demonſtr.

5. b. | *O.4a3 : t4 — 2t3+t2.* *O.4a3+2t3 — t2 : t4.*
5. b. | *O.12a2r : t4 — t2.* *O.12a2r+t2 : t4.*
| *O.4a3+2t3 — t2 : O.12a2r+t2.*
| *O.4a3+2t3 : O.12a2r+2t2.*
| *O.2a3+t3 : O.6a2r+t2.* Quod &c.

---

3. *O.6a4+t4+t : O.24a3r+4t3.*

Demonſtr.

5. b. | *O.30a4 : 6t5 — 15t4+10t3 — t.*
| *O.30a4+15t4 — 10t3+t : 6t5.*
5. b. | *O.60a3r : 3t5 — 5t3+2t.*
| *O.60a3r+5t3 — 2t : 3t5.*

O.120a3r

5. b. | O.120a3r+10t3—4t:6t5.
| O.30a4+15t4—10t3+t:O.120a3r+10t3—4t.
| O.30a4+15t4+5t:O.120a3r+20t3.
| O.6a4+3t4+t:O.24a3r+4t3. Quod &c.

4. O.12a3r+t3:O.18a2r2+t.

Demonſtr.

5. b. | O.60a3r:3t5—5t3+2t.
| O.60a3r+5t3—2t:3t5.
5. b. | O.30a2r2:t5—t.
| O.30a2r2+t:t5.
| O.90a2r2+3t:3t5.
| O.60a3r+5t3—2t:O.90a2r2+3t.
| O.60a3r+5t3:O.90a2r2+5t.
| O.12a3r+t3:O.18a2r2+t. Quod, &c.

5. O.6a5+3t5+2t2:O.30a4r+5t4.
6. O.12a4r+t4:O.24a3r2+t2.
7. O6a6+3t6+4t3:O.36a5r+6t5+t.
8. O.12a5r+t5+t:O.30a4r2+2t3.
9. O.18a4r2+t3:O.24a3r3+t.
10. O.6a7+3t7+7t4:O.42a6r+7t6+3t2.
11. O.12a6r+t6+2t2:O.36a5r2+3t4.
12. O.18a5r2+t4:O.30a4r3+t2.
13. O.30a8+15t8+56t5+9t:O.80a7r+40t7+40t3.
14. O.60a7r+5t9+25t3:O.210a6r2+21t5+9t.
15. O.30a6r2+2t5+3t:O.60a5r3+5t3.

16. O.

16. *O.120a5r3+10t3 : O.150a4r4+t5+9t.*
17. *O.10a9+5t9+28t6+12t2:O.90a8r+15t8+30t4.*
18. *O.60a8r+5t8+50t4 : O.240a7r2+28t6+27t2.*
19. *O.90a7r2+7t6+18t2 : O.210a6r3+25t4.*
20. *O.120a6r3+10t4 : O.180a5r4+t6+9t2 .*
21. *O.6a10+3t10+24t7+24t3 :* O.*60a9r+10t9 +36t5+5t.*
22. O.*60a9r+5t9+90t5+25t : O.270a8r2+36t7 +84t3 .*
23. *O.90a8r2+8t7+57t3 :O.240a7r3+40t5+25t.*
24. *O.120a7r3+15t5+25t:O.210a6r4+t7+39t3.*
25. *O.30a6r4+6t3:O.36a5r5+t5+5t.*

Et alia huiuſmodi proponi poſſunt innumerabilia : quibus in ſingulis demonſtrari poterit, quæ, & qualiter acceptæ totæ, ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

---

*Theor.*10.*Prop.*10.

DEmonſtrare, quæ, & qualiter acceptæ ſemitotæ, ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Pro innumerabilibus theorematis huius tituli, vigintiquinque proponimus, & vnum demonſtramus, ad oſtenſionem methodi.

1. *O.2a2+m2+m : O.4ar.*

Demonſtr.

6. h. | 0.6a2 : 2m3+3m2+m.
| 0.6a2 — 3m2 — m : 2m3.
6. h. | 0.6ar : m3+3m2+2m.
| 0.12ar : 2m3+6m2+4m.
| 0.12ar — 6m2 — 4m : 2m3.
| 0.6a2 — 3m2 — m : 0.12ar — 6m2 — 4m.
| 0.6a2 : 0.12ar — 3m2 — 3m.
| 0.2a2 : 0.4ar — m2 — m.
| 0.2a2+m2+m : 0.4ar Quod &c.

2. 0.2a3+m3+2m2+m : 0.6a2r.
3. 0.6a4+3m4+8m3+6m2+m : 0.24a3r.
4. 0.12a3r+m3+3m2+2m : 0.18a2r2.
5. 0.6a5+3m5+10m4+10m3+2m2 : 0.30a4r+m.
6. 0.12a4r+m4+4m3+5m2+2m : 0.24a3r2.
7. 0.6a6+3m6+12m5+15m4+4m3 : 0.36a5r+
3m2+m.
8. 0.12a5r+m5+5m4+8m3+4m2 : 0.30a4r2.
9. 0.18a4r2+m3+3m2+2m : 0.24a3r3.
10. 0.6a7+3m7+14m6+21m5+7m4+m : 0.42a6r
+7m3+3m2.
11. 0.12a5r+m6+6m5+12m4+8m3 : 0.36a5r2+m2
+2m.
12. 0.18a5r2+m4+4m3+5m2+2m : 0.30a4r3.
13. 0.30a8+15m8+80m7+140m6+56m5+
20m2+9m : 0.240a7r+70m4+40m3.
14. 0.60a7r+5m7+35m6+84m5+70m4:

0.210a6m

O.210a6m+10m3+30m2+4m.

15. *O.30a6r2+2m5+10m4+15m3+5m2:O.60a5r3+2m.*

16. *O.120a5r3+20m2+16m: O.150a4r4+m5+5m4.*

17. *O.10a9+5m9+30m8+60m7+28m6+20m3+12m2:O.90a8r+42m5+30m4+3m.*

18. *O.60a8r+5m8+40m7+112m6+112m5+18m:O.240a7r2+20m4+80m3+7m2.*

19. *O.90a7r2+7m6+42m5+80m4+40m3:O.210a6r3+27m2+22m.*

20. *O.120a6r3+20m3+36m2+16m:O.180a5r4+m6+6m5+5m4.*

21. *O.6a10+3m10+20m9+45m8+24m7+30m4+24m3:O.60a9r+42m6+36m5+9m2+5m.*

22. *O.60a9r+5m9+45m8+144m7+168m6+72m2+16m:O.270a8r2+36m5+180m4+24m3.*

23. *O.90a8r2+8m7+56m6+128m5+80m4+2m:O.240a7r3+63m3+61m2.*

24. *O.120a7r3+40m4+76m3+12m2:O.210a6r4+m7+7m6+6m5+24m.*

25. *O.30a6r4+8m2+8m:O.36a5r5+m5+5m4+4m3.*

Et omnino in qualibet baſi ſpecioſæ tabulæ, proponi, & demonſtrari poteſt, quæ, & qualiter acceptæ ſemitotę, ſpecies vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Ther. 11. *Prop.* 11.

DEmonſtrare, quæ, & qualiter acceptæ ſeſquitotæ, ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc titulo vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonſtramus, ad oſtenſionem methodi.

1. $O.2a2+q2+2:O.3ar+3q.$

Demonſtr.

7. *b.* $O.6a2:2q3-9q2+13q-6.$
$O.6a2+3q2+6:2q3-6q2+13q.$
7. *b.* $O.6ar:q3-3q2+2q.$
$O.12ar:2q3-6q2+4q.$
$O.12ar+9q:2q3-6q2+13q.$
$O.6a2+3q2+6:O.12ar+9q.$
$O.2a2+q2+2:O.4ar+3q.$ Quod &c.

2. $O.2a3+q3+5q:O.6a2r+4q2+2.$
3. $O.6a4+3q4+30q2+6:O.24a3r+16q3+23q.$
4. $O.12a3r+q3+2q:O.18a2r2+3q2.$
5. $O.6a5+3q5+50q3+31q:O.30a4r+20q4+58q2+6.$
6. $O.12a4r+q4+5q2:O.24a3r2+4q3+2q.$
7. $O.6a6+3q6+75q4+93q2+6:O.36a5r+24q5+116q3+37q.$
8. $O.12a5r+q5+8q3:O.30a4r2+5q4+4q2.$
9. $O.18a4r2+q3+2q:O.24a3r3+3q2.$

10. O.6a7 + 3q7 + 105q5 + 217q3 + 41q : O.42a6r + 28q6 + 203q4 + 129q2 + 6.

11. O.12a6r + q6 + 12q4 + 2q : O.36a5r2 + 6q5 + 8q3 + q2.

12. O.18a5r2 + q4 + 5q2 : O.30a4r3 + 4q3 + 2q.

13. O.30a8 + 15q8 + 700q6 + 2170q4 + 820q2 + 30 : O.240a7r + 160q7 + 1624q5 + 1720q3 + 231q.

14. O.60a7r + 5q7 + 84q5 + 30q2 : O.210a6r2 + 35q6 + 70q4 + 10q3 + 4q.

15. O.90a6r2 + 6q5 + 45q3 : O.180a5r3 + 30q4 + 15q2 + 6q.

16. O.120a5r3 + 5q4 + 16q : O.150a4r4 + q5 + 20q2.

17. O.10a9 + 5q9 + 300q7 + 1302q5 + 820q3 + 93q : O.90a8r + 60q8 + 812q6 + 1290q4 + 348q2 + 10.

18. O.60a8r + 5q8 + 112q6 + 80q3 : O.240a7r2 + 40q7 + 112q5 + 20q4 + 7q2 + 18q.

19. O.180a7r2 + 14q6 + 105q4 + 44q : O.420a6r3 + 84q5 + 80q3 + 54q2.

20. O.120a6r3 + 6q5 + 36q2 : O.180a5r4 + q6 + 5q4 + 20q3 + 16q.

21. O.6a10 + 3q10 + 225q8 + 1302q6 + 1230q4 + 279q2 + 6 : O.60a9r + 40q9 + 696q7 + 1548q5.

22. O.60a9r + 5q9 + 144q7 + 180q4 + 16q : O.270a8r2 + 45q8 + 168q6 + 36q5 + 24q3 + 72q2.

23. O.90a8r2 + 8q7 + 128q5 + 61q2 + 2q : O.240a7r3 + 56q6 + 80q4 + 63q3.

24. O.

24. $O.120a7r3+7q6+76q3 : O.210a6r4+q7+8q5+40q4+12q2+24q.$

25. $O.30a6r4+5q4+8q : O.36a5r5+q5+4q3+8q2.$

Poſſunt hæc, & alia huiuſmodi, ſub hoc titulo demonſtrari, in infinitum, iuxta traditam methodum: vt omninò pateat, quæ, & qualiter acceptæ ſeſquitotæ, ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas æquales faciant.

Theor. 12. *Prop.* 12.

DEmonſtrare, quæ, & qualiter acceptæ primi lateris ſpecies, binas quaſque ſpecies in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Sub hoc etiam titulo, vigintiquinque proponimus theoremata, ex quibus vnum demonſtramus, ad oſtenſionem methodi.

1. $O.a2+O.a : O.2ar.$ Demonſtratum eſt in 8. *h.*

2. $O.2a3+O.3a2+O.a : O.6a2r.$ Demonſtr. ibidem.

3. $O.a4+O.2a3+O.a2 : O.4a3r.$ Demonſtr. ibidem.

4. $O.4a3r+O.a2+O.a : O.6a2r2.$

Demonſtr.

8. *h.* | $O.4a3r : O.a4+O.2a3+O.a2.$
| $O.4a3r+O.a2+O.a : O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.$
8. *h.* | $O.6a2r2 : O.a4+O.2a3+O.2a2+O.a.$
| $O.4a3r+O.a2+O.a : O.6a2r2.$ Quod &c.

5. $O.6a5+O.15a4+O.10a3 : O.30a4r+O.a.$

6. $O.6a4r+O.2a3+O.3a2+O.a : O.12a3r2.$

7. $O.2a6+O.6a5+O.5a4 : O.12a5r+O.a2.$

8. O,

8. O.12a5r+O.5a4+O.10a3 + O.4a2 : O.30a4r2 + O.a.

9. O.30a4r2 + O.8a5 + O.5a2:O.40a3r3 + O.3a.

10. O.6a7 + O.21a6 + O.21a5 + O.a:O.42a6r + O.7a3.

11. O.12a6r + O.6a5 + O.15a4 + O.8a3 : O.36a5r2 + O.3a2 + O.2a.

12. O.9a5r2 + O.2a3 + O.3a2 + O.a : O.15a4r3.

13. O.3a8 + O.12a7 + O.14a6 + O.2a2 : O.24a7r + O.7a4.

14. O.12a7r + O.7a6 + O.21a5 + O.14a4 + O.a: O.42a6r2 + O.7a3 + O.6a2.

15. O.6a6r2 + O.2a4 + O.4a3 + O.a2 : O.12a5r3 + O.a.

16. O.24a5r3 + O.4a2 + O.5a : O.30a4r4 + O.a4 + O.2a3 .

17. O.10a9 + O.45a8 + O.60a7 + O.20a3 : O.90a8r + O.42a5 + O.3a.

18. O.30a8r + O.20a7 + O.70a6 + O.56a5 + O.10a2 + O.9a : O.120a7r2 + O.35a4 + O.40a3.

19. O.90a7r2 + O.42a5 + O.105a4 + O.40a3: O210a6r3 + O.20a2 + O.22a.

20. O.120a6r3 + O.20a3 + O.45a2 + O.16a: O.180a5r4 + O.6a5 + O.15a4.

21. O.2a10 + O.10a9 + O.15a8 + O.10a4 : O.20a9r + O.14a6 + O.3a2.

22. O.20a9r + O.15a8 + O.60a7 + O.56a6 + O.20a3 + O.24a2:

$+O.24a2 : O.90a8r2 + O.42a5 + O.60a4 + O.3a.$

23\. $O.90a8r2 + O.56a6 + O.168a5 + O.80a4 + O.27a : O.240a7r3 + O.120a3 + O.61a2.$

24\. $O.120a7r3 + O.40a4 + O.115a3 + O.12a2 : O.210a6r4 + O.7a6 + O.21a5 + O.49a.$

25\. $O.30a6r4 + O.8a2 + O.13a : O.36a5r5 + O.5a4 + O.10a3.$

Et alia deinceps proponi poſſunt, & demonſtrari: & vniuerſaliter poſſibile eſt demonſtrare, quæ, & qualiter acceptæ primi lateris ſpecies, binas quaſque ſpecies, in eadem baſi vicinas, aliqualiter acceptas, æquales faciant.

Theor. 13. Prop. 13.

IN tabula ſubquadratrice cuiuſque numeri, & in qualibet baſi, ſubquadratrices, & æque ordinata tota, totam componunt, vnitate plus ordinatam.

Hypoth.

In tabula ſubquadratrice, in ſecunda baſi, ſint ſubquadratrices $O.a2, O.2a3, O.r2$: ſitque tota ſecunda, $t2$; tota tertia, $t3$.

Dico $O.a2 + O.2ar + O.r2 + t2 : t3.$

Demonſtr.

def. 6. p. | $u ; t : t2 ; t3.$

2. p. | $u ; t - u : t2 ; t3 - t2.$

Ergo $t3 - t2$, eſt toties $t2$, quoties eſt $t - u$: ideſt, quoties relinquitur ipſe numerus t, vnitate dempta. Sed cuiuſque numeri tot ſunt abſciſſiones, quotus ipſe relinquitur,

quitur, vnitate dempta: nam binarij, vna tantùm eſt abſciſſio, qua vnitas abſcinditur; ternarij, duæ, quibus vnitas, & binarius abſcinduntur; & ſic deinceps: ergo $t3 - t2$, eſt toties $t2$, quot ſunt ipſius t abſciſſiones.

Pro ſingulis autem abſciſſionibus.

6. p. | $a2 + 2ar + r2 : t2$.
Ergo pro omnibus.
$O.a2 + O.2ar + O.r2 : t3 - t2$.
Ergo communiter addendo $t2$.
$O.a2 + O.2ar + O.r2 + t2 : t3$. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 14. Prop. 14.

Tota quælibet, eſt æqualis quadratrici, in primo latere, in baſi proximè minùs ordinata iacenti, vnà cum alijs maſſis, in primo latere, in baſibus inferioribus, & vertice, acceptis aliqualiter, & vnitate.

Hypoth.

Eſto tota tertia $t3$.

Dico $t3$, eſſe æqualem quadratrici in primo latere, in ſecunda baſi, vna cum alijs, &c.

Demonſtr.

4. h. | $t3 : O.3a2$, vna cum alijs, &c.
def. 8. p. | $a2$ eſt in primo latere in ſecunda baſi tabulæ proportionalium.
def. 11. p | $a2$ eſt ibidem in tabula nominum.
def. 9. 2. | $O.a2$ eſt ibidem in tabula ſpecioſa.

def.11.2. | *O.a2* eſt ibidem in tabula ſubquadratrice.
def.13.2. | *O.3a2* eſt ibidem in tabula quadratrice.
| *r3* eſt æqualis quadratrici, in primo latere, in ſecunda baſi, vna cum alijs, &c. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 15. *Prop.* 15.

QVælibet ſubquadratrix, in primo latere, vna cum tota æque ordinata, atque ſua baſis, eſt æqualis ſubquadratrici, in ſecundo latere, in ſua baſi iacenti, vna cum maſſis, in ſecundo latere, in baſibus inferioribus, acceptis aliqualiter, & tota.

Hypoth.

Eſto ſubquadratrix *O.a3*, in primo latere, in tertia baſi. Dico *O.a3*, vnà cum tota tertia, æqualem eſſe ſubquadratrici, in ſecundo latere, in tertia baſi iacenti, vna cum alijs, &c.

Præpar.

Aſſumatur ſpecies, in ſecundo latere, in quarta baſi, ſecunda, & quartultima, *O.a3r*.

Demonſtr.

| *O.a3r* incrementa ſunt ęqualia.
2. *b.* | *O.a3*, vna cum &c: *O.3a2r*, vna cum alijs &c.
7. *p.* | *a2r* eſt ſecunda in tertia baſi tabulæ proportionalium.
def.11.p. | *3a2r* eſt ibidem in tabula nominum.
def.11.2. | *O.3a2r* eſt ibidem in tabula ſubquadratrice.

O.a3,

| *O.a3*, vna &c. eſt æqualis ſubquadratrici, in ſecundo latere, in tertia baſi, vna cum alijs, &c.
| Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

SI aliquot quantitatum, ſecunda ad tertiam, fuerit ſicut prima cum vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia ad quartam, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & quarta ad quintam ſicut prima cum tripla vltima ad ſecundam dempta tripla vltima; & ſic deinceps vſque ad vltimam: erit prima cum ſecunda ad ſecundam cum tertia, ſicut prima cum vltima ad ſecundam; & ſecunda cum tertia ad tertiam cum quarta, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia cum quarta ad quartam cum quinta, ſicut prima cum tripla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & ſic deinceps.

Hypoth.

Sint aliquot quantitates *a, b, c, d, e.*

$b ; c : a+e ; b-e.$

$c ; d : a+2e ; b-2e.$

$d ; e : a+3e ; b-3e.$

Dico $a+b ; b+c : a+e ; b.$

Demonſtr.

hypoth. | $a+e ; b-e : b ; c.$
| conuertendo, componendo, & permutando.

 $a+b$

2. p.	$a+b$; $b+c$: $a+e$; b. Quod &c.

Dico $b+c$; $c+d$: $a+2e$; $b-e$.

Demonſtr.

hypoth.	b; c : $a+e$; $b-e$.
2. p.	$b+c$; c: $a+b$; $b-e$.
hypoth.	c; d: $a+2e$; $b-2e$.
2. p.	c; $c+d$: $a+2e$; $a+b$.
p. p.	$b+c$; $c+d$: $a+2e$; $b-2e$. Quod &c.

Dico $c+d$; $d+e$: $a+3e$; $b-2e$.

Demonſtr.

hypoth.	c; d: $a+2e$; $b-2e$.
2. p.	$c+d$; d: $a+b$; $b-2e$.
hypoth.	d; e: $a+3e$; $b-3e$.
2. p.	d; $d+e$: $a+3e$; $a+b$.
p. p.	$c+d$; $d+e$: $a+3e$; $b-2e$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 17. Prop. 17.

SI aliquot quantitatum, ſecunda ad tertiam fuerit, ſicut prima cum vltima ad ſecundam dempta vltima; & tertia ad quartam, ſicut prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & ſic deinceps vſque ad vltimam: fuerit autem & prima æqualis vltimæ: erunt totidem quantitates & vna amplius, prima ſeorſim, prima cum ſecunda, ſecunda cum tertia, tertia cum quarta, & deinceps binę aggregatæ, & demum ſeorſim vltima; quarum ſecunda ad tertiam, eſt vt prima cum vltima ad ſecundam

dempta

dempta vltima; & tertia ad quartam, vt prima cum dupla vltima ad ſecundam dempta dupla vltima; & ſic deinceps vſque ad vltimam.

Hypoth.

Sint tres quantitates a, b, c, quarum
$b; c : a + c; b - c$.
$a : c$.

Dico quatuor quantitates eſſe a, $a + b$, $b + c$, c, quarum
$a + b; b + c : a + c; a + b - c$.

Demonſtr.

16.b. | $a + b; b + c : a + c; b$.
hypoth. | $a : c$.
| $a + b - c : b$.
| $a + b; b + c : a + c; a + b - c$. Quod &c.

Dico $b + c; c : a + 2c; a + b - 2c$.

hypoth. | $b; c : a + c; b - c$.
2.p. | $b + c; c : a + b; b - c$.
hypoth. | $b + c : a + b$.
| $c : b - c$.
| $2c : b$.
| $a + 2c : a + b$.
| $a + b - 2c : b - c$.
| $b + c; c : a + 2c; a + b - 2c$. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 18. *Prop.* 18.

IN vnaquaque baſi tabulæ multiplicium, prior quantitas ad poſteriorem vicinam, eſt vt ordo prioris à prima, ad ordinem poſterioris ab vltima.

Demonſtr.

Quoniam in ſecunda baſi tabulæ multiplicium, ſunt tres quantitates, quarum ſecunda ad tertiam, eſt vt prima cum tertia ad ſecundam dempta ter-
def..0.*p* tia; & prima eſt æqualis tertiæ; & in tertia baſi, ſunt ordinatæ quatuor quantitates ex ſecunda baſi deſumptæ, prima ſeorſim, prima & ſecunda, ſecun-
17. *h.* da & tertia, & tertia ſeorſim: ergo etiam in tertia baſi, ſecunda quãtitas ad tertiam, eſt vt prima cum quarta ad ſecundam dempta quarta; & tertia ad quartam, eſt vt prima cum dupla quarta, ad ſecundam dempta dupla quarta: & ſic deinceps oſtendetur in ſingulis baſibus.

Eſt autem in vnaquaque baſi tabulæ multipli-
*def.*10.*p* cium, prima quantitas vnitas, & vltima vnitas: &
def.p.p. ſecunda quantitas eſt ordo baſis, idemque ordo ipſius quantitatis ab vltima. Ergo in quarta baſi, prima quantitas, quæ eſt quintultima, ad ſecũdam, quæ eſt quartultima, eſt vt vnitas ad quaternariũ: ſecunda ergo ad triultimam, eſt vt binarius ad ternarium; tertia ad penultimam, vt ternarius ad binarium; quarta ad vltimam, vt quaternarius ad vnitatem. Similiter oſtendetur in ſingulis baſibus. Quare &c.

Theor.

Theor. 19. Prop. 19.

PRoportionalium, & multiplicium tabulis congruentibus, quæque proportionalis, habet numeros denominatores, reciprocè proportionales; vt in ſuis cornibus multiplices.

Demonſtr.

Proportionalium aſſumatur bitertia, cuius denomina-
7. *p.* tores binarius, & ternarius. Eſt autem bitertia in quinta baſi quarta tritultima: cuius cornua ſunt in
def. p. p. quarta baſi, alterum in quarto, alterum in tritultimo latere: ideſt alterum cornu eſt, in quarta baſi,
def. p. p. quarta quantitas; alterum, tritultima. Sed in quarta baſi, quarta eſt penultima, & tritultima eſt ter-
18. *b.* tia: & in tabula multiplicium, tertia ad penultimã, eſt vt ternarius ad binarium: ergo cum bitertiæ denominatores ſint, prior binarius, & poſterior ternarius; eiuſdem in cornibus multiplices reciprocè ſunt proportionales, prior ad poſteriorem, vt ternarius ad binarium. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. Prop. 20.

IN tabula ſpecierum, in eadem baſi, vicinæ ſpecies, multiplicatæ per numeros ſuorum ordinum, prioris à prima, & poſterioris ab vltima, ſunt æquales, additis tamen vtrimque maſſis, in inferioris ordinis baſibus, & in earum-

dem

dem lateribus, verſus tabulæ verticem diuergentibus; aliqualiter acceptis, atque totis minùs ordinatis, quàm ſit ipſa baſis.

Hypoth.

Sint ſpecies in quinta baſi, ſecunda quintultima, & tertia quartultima.

Dico duplam ſecundam quintultimam, æqualem eſſe quadruplæ tertiæ quartultimæ, additis tamen vtrimque alijs &c.

Præpar.

6. p. Aſſumatur, in ſexta baſi, ſpecies tertia quintultima, cuius denominatores numeri, quaternarius, & binarius.

Demonſtr.

Tertiæ & quintultimæ ſpeciei æqualia ſunt incrementa:
2. h. alterum ex maſſis compoſitum in tertio latere, multiplicatis per numeros quartæ baſis multiplicium, quaternarium, & reliquos; quarum vna eſt in quinta baſi quartultima, per quaternarium multiplicata: alterum ex maſſis in quintultimo latere,
2. h. multiplicatis per numeros ſecundæ baſis multiplicium, nempè binarium; quarum vna eſt, in quinta baſi, ſecunda, multiplicata per binarium: & reliquæ maſſæ, in vtroque incremento, ſunt inferiores, & demum totæ inferiores, quàm quinta. Ergo dupla ſecunda quintultima, eſt æqualis quadru-

druplæ tertiæ quartultimæ, additis vtrimque alijs &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. Prop. 21.

IN tabula ſubquadraticum, in eadem baſi, ſubquadratrices vicinæ ſunt æquales, additis tamen vtrimque maſſis, in inferioris ordinis baſibus, & in earumdem lateribus, verſus tabulæ verticem diuergentibus, aliqualiter acceptis, atque totis, minùs ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Similiter & vicinæ quadratrices ſunt æquales, additis tamen &c.

Hypoth.

Sint ſubquadratrices, in quinta baſi, vicinæ, producta ex ſecunda quintultima ſpecie per ſecundum quintultimum multiplicem, & producta ex tertia quartultima ſpecie, per tertium quartultimum multiplicem, *O.5a4r1* & *O.10a3r2*.

Dico *O.5a4r*, additis &c: *O.10a3r2*, additis &c.

Præpar.

Aſſumatur, in ſexta baſi, ſpecies tertia quintultima, cuius denominatores, quaternarius, & binarius, nempè *O.a4r2*: quibuſcum numeris, reciprocè proportionales ſunt multiplices, in eiuſdem ſpeciei cornibus iacentes, 5 ad 10. Fiat itaque, vt 2 ad 5, ita *O.2a4r*, vna cum alijs &c. ad *O.5a4r*, vna cum alijs &c. item vt 4 ad 10, ita *O.4a3r2*, vnà cum alijs &c. ad *O.10a3r2*, vna cum alijs &c.

19.b.

poſt.vn.

K *Demonſtr.*

Demonſtr.

20.*b.* | $O.2a4r$, vna cum alijs &c: $O.4a3r2$, vna cũ alijs &c.
2.*p.* | $O.2a4r$, vna cum alijs &c; $O.4a3r2$, vna cum &c: $O.5a4r$, vna cum &c; $O.10a3r2$, vna cum &c.
9.5. | $O.5a4r$, vna cum &c: $O.10a3r2$, vna cum &c. Quod &c.

Dico $O.30a4r$, vna cum &c: $O.60a3r2$, vna cum &c.

Præpar.

poſt.vn. | $O.5a4r$, vna cum &c: & $O.10a3r2$, vna cum &c. ſextuplicẽtur, & fiant $O30a4r$, vna cum &c. & $O.60a3r2$, vna &c.

Demonſtr.

ſup. | $O.5a4r$, vna &c: $O.10a3r2$, vna &c.
9.5. | $O30a4r$. vna &c: $O.60a3r2$, vna &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Demonſtr.

Patet inductione per 5. hu.

21.*b.* | Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, ſibi in eadem baſi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum baſium ſpeciebus, aliqualiter acceptis, & totis. Et quadratrix vicina, alte-
21.*b.* | ri vicinæ eſt æqualis, additis vtrimque alijs infe-

15. *h.* riorum baſium ſpeciebus, & totis: & demum pri-
14. *b.* mæ quadratrici eiuſdem baſis: & prima quadratrix vna cum alijs primi lateris quadratricibus inferiorum baſium, & vnitate, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit ipſa baſis. Similiter
ſup. aliæ inferiorum baſium ſpecies, alijs ſpeciebus, & demum totis, ſunt æquales, non plus ordinatis,
5. *h.* quàm ſit baſis quadratricis primò ſumptæ. Quare demum quadratrix primò ſumpta, eſt æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Theor. 23. Prop. 23.

IN tabula multiplicium, ſumma numerorum cuiuſque baſis, eſt tota poteſtas binarij, quotus eſt ordo baſis.

Demonſtr.

Nam in tabula proportionalium, ſi rationalis, & radices
def. 8. p. fuerint æquales inter ſe: etiam reliquæ omnes quantitates, & rationali, & radicibus, & ad inuicem æquales erunt: quia ratio æqualitatis, quantumlibet multiplicata, & ſecum ipſa compoſita, ſemper eſt æqualitas. Quare ſi rationalis, & radices fuerint vnitates; omnes proportionales erunt
def. 11. p. vnitates. eritque tabula nominum eadem, quæ
def. 10. p. tabula multiplicium: quia vnitas non multiplicat et cuiuſque baſis nominum ſumma, eadem erit

8. p. | quæ ſumma eiuſdem baſis multiplicium. Sed cuiuſque baſis nominum ſumma eſt poteſtas aggregati radicum, æqueordinata cum baſi. Ergo cuiuſque baſis multiplicium ſumma, eſt poteſtas aggregati vnitatum, ideſt binarij, æqueordinata cum baſi.

Theor. 24. Prop. 24.

POteſtas binarij multiplicata per ſuum ordinis numerum, minor eſt æqueordinata poteſtate ternarij.

Hypoth.

Eſto binarius *b*, ternarius *t*. Conſtat *b*, minorem eſſe, quàm *t*.

Dico 2*b*2, minorem eſſe, quàm *t*2.
3*b*3, minorem, quàm *t*3.
4*b*4, minorem quàm *t*4. Et deinceps.

Demonſtr.

def. 8. p. | *t*; *b*: *t*2; *tb*: *tb*; *b*2: *t*2 — *tb*; *tb* — *b*2.
& 2. p. | *t*, *b*, ſunt numeri inter ſe primi.
23. 7. | *t*, *b*, ſunt minimi in ſua ratione.
| *t*2 — *tb*, non eſt minor, quàm *t*.
| *tb* — *b*2, non eſt minor, quàm *b*.
| *t*2 — *b*2, non eſt minor quàm *t*+*b*.
hypoth. | *b*, eſt minor, quàm *t*.
| 2*b*, eſt minor, quàm *t*+*b*.
| 2*b*, eſt minor, quàm *t*2 — *b*2.
hypoth. | 2, eſt *b*.

$2b$, eſt $b2$.
$b2$, eſt minor, quàm $t2$.
$2b2$, eſt minor, quàm $t2$. Quod &c.
$2b2$, eſt $b3$.
$b3$, eſt minor, quàm $t2$.
$3b3$, eſt minor, quàm $3t2$.
$3t2$, eſt $t3$.
$3b3$, eſt minor, quàm $t3$. Quod &c.
$3b4$, eſt minor, quàm $2t3$.
ſup. $b3$, eſt minor, quàm $t2$.
hypoth. b, eſt minor, quàm t.
$b4$, eſt minor, quàm $t3$.
$4b4$, eſt minor, quàm $3t3$.
$3t3$, eſt $t4$.
$4b4$, eſt minor, quàm $t4$. Quod &c.
Et ſimiliter deinceps oſtendetur in infinitum.

Quare &c.

Theorema 25. Prop. 25.

IN tabula multiplicium, quiſque numerus multiplicans numerum vnitate maiorem, quàm ſit ordo ſuæ baſis, facit numerum minorem totâ poteſtate ternarij, quotus eſt numerus multiplicatus.

Hypoth.

Eſto, numerus a, in tabula multiplicium, in quinta baſi: & eſto ternarius t.

Dico $6a$, minorem eſſe, quam $t6$.

Præpar.

Præpar.

Accipiatur binarius *b*.

Demonſtr.

32. *b.* Numerus *a*, & alij quintæ baſis, componunt *b5*.
def.6.p. Ergo *a*, minor eſt, quàm *b5*. Sed *b5*, minor eſt, quàm *b6*. Ergo *a*, multò minor eſt, quàm
24. *b.* *b6*. Ergo *6a*, minor eſt quàm *6b6*. Sed *6b6*, minor eſt, quàm *t6*. Ergo *6a*, minor eſt quàm *t6*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. Prop. 26.

QVælibet quadratrix, pro radice binario, minor eſt, quàm ſeſquitota; maior, quàm ſemitota, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis. Porrò quadratrix iacens in vertice tabulæ, eſt æqualis ſemitotæ.

Hypoth.

Eſto, pro radice binario, quælibet quadratrix *a*, in quarta baſi.

Dico *a* maiorem eſſe, quàm *m5*; & minorem, quàm *q5*.

6. *b.* Porrò conſtat quod *O.u*, pro quacunque radice, eſt æqualis ipſi *m*.

Præpar.

def.8.b. Pro radice binario, vnica tantum eſt abſciſſio, qua vnitas abſcinditur, & vnitas relinquitur: &
def.8.p. vnica tabula proportionaliũ, in qua omnes pro-

por-

def.8.b. portionales ſunt vnitates: & ſynonymæ propor-
def.10.b. tionales ſolitariæ: vnde tabula ſpecierum eſt ea-
def.11.p. dem, quæ proportionalium ex vnitatibus. Dein-
def.11.b. de vnica eſt tabula nominum, eadem, quæ multi-
plicium: vnde tabula ſubquadratricum, eadem
eſt, quæ nominum, & multiplicium. Accipiatur
itaque ſubquadratrix *b*, in quarta baſi, quadra-
trici *a*, ſynonyma.

Demonſtr.

præpar. | *b*, eſt in tabula multiplicium, in quarta baſi.
def.13.b. | *a* : 5 *b*.
def.19.b. | pro binario, *m*, eſt vnitas.
def.6.p. | *m* 5, eſt vnitas.
def.10.p | 5 *b*, eſt maior vnitate.
| *a*, eſt maior, quàm *m* 5. Quod &c.
def.18.b | Pro binario, *q*, eſt ternarius.
25.b. | 5 *b*, eſt minor, quàm *q* 5.
| *a*, eſt minor, quàm *q* 5. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Prop. 27.

QVælibet poteſtas à binario, maior eſt numero ſui ordinis.

Hypoth.

Eſto binarius *b*.

Demonſtr.

Vnitas eſt minor, quàm *b*. ergo binarius, minor eſt,

quàm

Demonſtr.

20.*b.* O.2a4r,vna cum alijs &c:O.4a3r2,vna cũ alijs &c.

2.*p.* O.2a4r, vna cum alijs &c; O. 4a3r2, vna cum &c: O.5a4r, vna cum &c; O.10a3r2, vna cum &c.

9.5. O.5a4r, vna cum &c: O.10a3r2, vna cum &c. Quod &c.

Dico O.30a4r, vna cum &c: O.60a3r2, vna cum &c.

Præpar.

poſt.vn. O.5a4r, vna cum &c: & O.10 a3r2, vna cum &c. ſextuplicẽtur, & fiant O30a4r, vna cum &c. & O.60a3r2, vna &c.

Demonſtr.

ſup. O.5a4r, vna &c: O.10a3r2, vna &c.

9.5. O 30a4r. vna &c: O.60a3r2, vna &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Demonſtr.

Patet inductione per 5. h.

21.*h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, ſibi in eadem baſi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum baſium ſpeciebus, aliqualiter acceptis, & totis. Et quadratrix vicina, alte-
21.*h.* ri vicinæ eſt æqualis, additis vtrimque alijs infe-

15. h. riorum baſium ſpeciebus, & totis: & demum pri-
14. b. mæ quadratrici eiuſdem baſis: & prima quadra-
trix vna cum alijs primi lateris quadratricibus in-
feriorum baſium, & vnitate, eſt æqualis totæ, vni-
ſup. tate plus ordinatæ, quàm ſit ipſa baſis. Similiter aliæ inferiorum baſium ſpecies, alijs ſpeciebus, & demum totis, ſunt æquales, non plus ordinatis,
5. b. quàm ſit baſis quadratricis primò ſumptæ. Quare demum quadratrix primò ſumpta, eſt æqualis totæ vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Theor. 23. Prop. 23.

IN tabula multiplicium, ſumma numerorum cuiuſque baſis, eſt tota poteſtas binarij, quotus eſt ordo baſis.

Demonſtr.

Nam in tabula proportionalium, ſi rationalis, & radices
def. 8. p. fuerint æquales inter ſe: etiam reliquæ omnes quantitates, & rationalis, & radicibus, & ad inuicem æquales erunt: quia ratio æqualitatis, quantumlibet multiplicata; & ſecum ipſa compoſita, ſemper eſt æqualitas. Quare ſi rationalis, & radices fuerint vnitates; omnes proportionales erunt
def. 11. p. vnitates. eritque tabula nominum eadem, quæ
def. 10. p. tabula multiplicium: quia vnitas non multiplicat et cuiuſque baſis nominum ſumma, eadem erit

8. p. | quæ ſumma eiuſdem baſis multiplicium. Sed cuiuſque baſis nominum ſumma eſt poteſtas aggregati radicum, æqueordinata cum baſi. Ergo cuiuſque baſis multiplicium ſumma, eſt poteſtas aggregati vnitatum, ideſt, binarij, æqueordinata cum baſi.

Theor. 24. Prop. 24.

POteſtas binarij multiplicata per ſuum ordinis numerum, minor eſt æqueordinata poteſtate ternarij.

Hypoth.

Eſto binarius b, ternarius t. Conſtat b, minorem eſſe, quàm t.

Dico $2b2$, minorem eſſe, quàm $t2$.
$3b3$, minorem, quàm $t3$.
$4b4$, minorem quàm $t4$. Et deinceps.

Demonſtr.

def. 8. p. | t; b: $t2$; tb: tb; $b2$: $t2 - tb$; $tb - b2$.
& 2. p. | t, b, ſunt numeri inter ſe primi.
23. 7. | t, b, ſunt minimi in ſua ratione.
$t2 - tb$, non eſt minor, quàm t.
$tb - b2$, non eſt minor, quàm b.
$t2 - b2$, non eſt minor quàm $t+b$.
hypoth. | b, eſt minor, quàm t.
$2b$, eſt minor, quàm $t+b$.
$2b$, eſt minor, quàm $t2 - b2$.
hypoth. | 2, eſt b.

2b,

$2b$, eſt $b2$.
$b2$, eſt minor, quàm $t2$.
$2b2$, eſt minor, quàm $t2$. Quod &c.
$2b2$, eſt $b3$.
$b3$, eſt minor, quàm $t2$.
$3b3$, eſt minor, quàm $3t2$.
$3t2$, eſt $t3$.
$3b3$, eſt minor, quàm $t3$. Quod &c.
$3b4$, eſt minor, quàm $2t3$.
ſup. $b3$, eſt minor, quàm $t2$.
hypoth. b, eſt minor, quàm t.
$b4$, eſt minor, quàm $t3$.
$4b4$, eſt minor, quàm $3t3$.
$3t3$, eſt $t4$.
$4b4$, eſt minor, quàm $t4$. Quod &c.
Et ſimiliter deinceps oſtendetur in infinitum.

Quare &c.

Theorema 25. Prop. 25.

IN tabula multiplicium, quiſque numerus multiplicans numerum vnitate maiorem, quàm ſit ordo ſuæ baſis, facit numerum minorem tota poteſtate ternarij, quotus eſt numerus multiplicatus.

Hypoth.

Eſto, numerus a, in tabula multiplicium, in quinta baſi: & eſto ternarius t.

Dico $6a$, minorem eſſe, quam $t6$.

Præpar.

Præpar.

Accipiatur binarius *b*.

Demonſtr.

32. *b.* Numerus *a*, & alij quintæ baſis, componunt *b5*. def.6.p. Ergo *a*, minor eſt, quàm *b5*. Sed *b5*, minor eſt, quàm *b6*. Ergo *a*, multò minor eſt, quàm 24. *b.* *b6*. Ergo *6a*, minor eſt quàm *6b6*. Sed *6b6*, minor eſt, quàm *t6*. Ergo *6a*, minor eſt quàm *t6*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. Prop. 26.

QVælibet quadratrix, pro radice binario, minor eſt, quàm ſeſquitota; maior, quàm ſemitota, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis. Porrò quadratrix iacens in vertice tabulæ, eſt æqualis ſemitotæ.

Hypoth.

Eſto, pro radice binario, quælibet quadratrix *a*, in quarta baſi.

Dico *a* maiorem eſſe, quàm *m5*; & minorem, quàm *q5*.

6. *b.* Porrò conſtat quod *O.u*, pro quacunque radice, eſt æqualis ipſi *m*.

Præpar.

def.8.b. Pro radice binario, vnica tantum eſt abſciſſio, qua vnitas abſcinditur, & vnitas relinquitur: & def.8.p. vnica tabula proportionaliũ, in qua omnes pro-

por-

def.8.b. portionales ſunt vnitates: & ſynonymæ proportionales ſolitariæ: vnde tabula ſpecierum eſt eadem, quæ proportionalium ex vnitatibus. Deinde vnica eſt tabula nominum, eadem, quæ multiplicium: vnde tabula ſubquadratricum, eadem eſt, quæ nominum, & multiplicium. Accipiatur itaque ſubquadratrix *b*, in quarta baſi, quadratrici *a*, ſynonyma.

def.10.b.

def.11.p.

def.11.b.

Demonſtr.

praepar. *b*, eſt in tabula multiplicium, in quarta baſi.

def.13b. *a* : 5 *b*.

def.19.b. pro binario, *m*, eſt vnitas.

def.6.p. *m* 5. eſt vnitas.

def.10.p 5 *b*, eſt maior vnitate.

a, eſt maior, quàm *m* 5. Quod &c.

def.18.b Pro binario, *q*, eſt ternarius.

25.b. 5 *b*, eſt minor, quàm *q* 5.

a, eſt minor, quàm *q* 5. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Prop. 27.

QVælibet poteſtas à binario, maior eſt numero ſui ordinis.

Hypoth.

Eſto binarius *b*.

Demonſtr.

Vnitas eſt minor, quàm *b*. ergo binarius, minor eſt, quàm

quàm 2 *b*: ſed 2*b*: eſt *b*2: ergo binarius, minor eſt, quã *b*: Ergo vnitas, multò minor eſt, quàm *b*2. Ergo ternarius, minor eſt, quàm 2*b*2. Sed 2*b*2, eſt *b*3. Ergo ternarius, minor eſt, quàm *b*3. Et ſic deinceps oſtendetur, quòd poteſtas à binario, maior eſt, quàm ſui ordinis numerus.

Theor. 28. Prop. 28.

QVælibet quadratrix primi lateris, pro radice binario, minor eſt, quàm poteſtas binarij, vnitate plus ordinata, quàm ſit eius baſis.

Hypoth.

Eſto, in primo latere, in quarta baſi, quadratrix *a*, pro radice binario: & eſto binarius *b*.

Dico *a*, minorem eſſe, quàm *b*5.

Præpar.

Accipiatur in primo latere, in quarta baſi, ſubquadratrix *c*, pro radice binario.

Demonſtr.

ex 26. *b*	*c* : *u*.
def. 11. *b*	*a* : 5*c*.
	a : 5.
27. *b*.	5, minor eſt, quàm *b*5.
	a, minor eſt, quàm *b*5. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. Prop. 29.

CViuslibet quadratricis, primi vel vltimi lateris, incrementum, minus eſt incremento totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis: & quælibet quadratrix, primi vel vltimi lateris, minor eſt quàm tota, vnitate plus ordinata: & ſeſquiquadratrix, minor eſt quàm ſeſquitota.

Meth. Demonſtr.

Tria propoſita, oportet primùm demonſtrare, in prioribus baſibus tabulæ, deinde in poſterioribus.

Dico *O.2a* incrementum, minus eſſe incremento *t2*: & *O.2a*, minorem eſſe, quàm *t2*: & ſeſqui-*O.2a*, minorem eſſe, quàm *q2*.

Demonſtr.

2. *h.* | *O.2a* incrementum eſt *O.2+2*.
8. *p.* | *t2* incrementum eſt *2t+u*.
2. *h.* | *O.2*: *2t*--- 2.
| *O.2+2*: *2t*.
| *O.2+2*, minor eſt, quàm *2t+u*.
| *O.2a* incrementum, minus eſt incremento *t2*. Quod &c.
28. *h.* | *O.2a*, pro binario, minor eſt, quàm *t2*.
| *O.2a*, pro ternario, minor eſt, quàm *t2*.
| Similiter, pro quaternario, & pro ſingulis numeris demonſtrabitur, quòd *O.2a* minor eſt, quàm *t2*: & ſeſqui-*O.2a*, minor eſt, quàm *q2*. Quod &c.

Dico O.3a2 incrementum, minus eſſe incremento t3: & O.3a2, minorem eſſe, quàm t3: & ſeſqui-O.3a2, minorem eſſe, quàm q3.

Demonſtr.

2.h. | O.3a2 incrementum, eſt O.6a+O.3+3.
8.p. | t3 incrementum, eſt 3t2+3t+u.
ſup. | O.6a, minor eſt, quàm 3t2.
ex ſup. | O.3+3, minor eſt, quàm 3t+u.
| O.3a2 incrementum, minus eſt incremento t3. Quod &c.
28.b. | O.3a2, pro binario, minor eſt, quàm t3.
| O.3a2, pro ternario, minor eſt quàm t3: necnon pro alio quolibet numero: & ſeſqui-O.3a2, minor eſt, quàm q3. Quæ &c:

Dico O.4a3 incrementum, minus eſſe incremento t4: & O.4a3, minorem eſſe, quàm t4: & ſeſqui-O.4a3, minorem, quàm q4.

Demonſtr.

2.b. | O.4a3 incrementum, eſt O.12a2+O.12a+O.4+4.
8.p. | Incrementum t4, eſt 4t3+6t2+4t+u.
ſup. | O.12a2, minor eſt, quàm 4t3.
ſup. | O.12a, minor eſt, quàm 6t2.
ex ſup. | O.4+4, minor eſt, quàm 4t+u.
| Incrementum O.4a3, minus eſt incremento t4. Quod &c.
28.b. | O.4a3, pro binario, minor eſt, quàm t4.

O.4a3,

O.4a3, pro ternario, minor eſt, quàm t4: necnon pro quaternario, & pro alijs deinceps numeris: & ſeſqui-O.4a3, minor eſt, quàm q4. Quæ &c.

Similiter oſtendetur de omnibus primi, & vltimi lateris quadratricibus.

Quare &c.

Theor. 30. Prop. 30.

CViuslibet quadratricis incrementum, maius eſt incremento ſemitotæ, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis; & minus eſt incremento ſeſquitotæ, pariter plus ordinatæ. Deinde quælibet quadratrix, maior eſt, quàm prædicta ſemitota; & minor, quàm prædicta ſeſquitota.

Meth. Demonſtr.

Quatuor propoſita primùm demonſtrare oportet, in prioribus baſibus tabulæ, deinde in poſterioribus.

Dico incrementum *O.2a*; maius eſſe, incremento *m2*; & minus eſſe, incremento *q2*: & *O.2a*, maiorem eſſe, quàm *m2*; minorem, quàm *q2*.

Demonſtr.

2. *b.* | Incrementum *O.2a*, eſt *O2+2*.
8. *p.* | Incrementum *m2*, eſt *2m+u*.
8. *p.* | Incrementum *q2*, eſt *2q+u*.
7. *b.* | *O.2* : *2m*.
| *O.2+2*, eſt maior, quàm *2m+u*.
| Incrementum *O.2a*, eſt maius incremento *m2*.

Quod &c.

def. 19. & 18. h.	$O.2+2 : 2m+2 : 2t$.
	$O.2+2$, eſt minor, quàm $2q$.
	$O.2+2$, eſt minor, quàm $2q+u$.
	Incrementum $O.2a$, eſt minus incremento $q2$. Quod &c.
26. h.	$O.2a$, pro binario, eſt maior, quàm $m2$; minor, quàm $q2$.
	$O.2a$, pro ternario, eſt maior, quàm $m2$; minor, quàm $q2$: item pro quaternario, & pro reliquis numeris. Quod &c.

Dico $O3a2$ incrementum, maius eſſe incremento $m3$; minus incremento $q3$: & $O.3a2$, maiorem eſſe, quàm $m3$; minorem, quàm $q3$.

Demonſtr.

6. h.	Incrementum $O.3a^2$, eſt $O.6a+O.3+3$.
8. p.	Incrementum $m3$, eſt $3m2+3m+u$.
8. p.	Incrementum $q3$, eſt $3q^2+3q+u$.
ſup.	$O6a$, eſt maior, quàm $3m^2$.
ſup.	$O.3 : 3m$.
	$O.3+3$, maior eſt. quàm $3m+u$.
	Incrementum $O.3a2$, eſt maius incremento $m3$. Quod &c.
ſup.	$O.6a$, eſt minor, quàm $3q^2$.
ſup.	$O.3+3$, eſt minor, quàm $3q+u$.
	Incrementum $O.3a2$, eſt minus incremento $q3$. Quod &c.
26. h.	$O.3a2$, pro binario, eſt maior, quàm $m3$; minor, quàm $q3$.

O.3a2, pro ternario, eſt maior, quàm *m3*; minor; quàm *q3*: necnon pro quaternario, & reliquis deinceps numeris. Quod &c.

Dico *O.6ar* incrementum, maius eſſe incremento *m3*; minus incremento *q3*: & *O.6ar*, maiorem eſſe, quàm *m3*; minorem, quàm *q3*.

Demonſtr.

2. *b.* | Incrementum O6ar, eſt O.6r+6t.
8. *p.* | Incrementum *m3*, eſt 3m2+3m+u.
8. *p.* | Incrementum *q3*, eſt 3q2+3q+u.
| O.6r, maior eſt, quàm 3m2.
| 6t, maior eſt, quàm 3m+u.
| Incrementum O.6ar, maius eſt incremento *m3*. Quod &c.
29.*b.* | O2r+2t, minor eſt, quàm q2.
| O6r+6t, minor eſt, quàm 3q2+3q+u.
| Incrementum O.6ar, minus eſt incremento *q3*. Quod &c.
26.*h.* | O.6ar, pro binario, eſt maior, quàm *m3*; minor, quàm *q3*.
| O.6ar, pro ternario, & pro reliquis numeris, eſt maior, quàm *m3*, minor, quàm *q3*. Quod &c.

Dico *O.4a3* incrementum, maius eſſe incremẽto *m4*; minus incremento *q4*: & *O.4a3*, maiorem eſſe, quàm *m4*; minorem, quàm *q4*.

De-

Demonſtr.

2.b. | Incrementũ O.4a3, eſt O.12a2+O.12a+O.4+4.
8.p. | Incrementum m4, eſt 4m3+6m2+4m+u.
8.p. | Incrementum q4, eſt 4q3+6q2+4q+u.
ſup. | O.12a2, maior eſt, quàm 4m3.
ſup. | O.12a, maior, quàm 6m2.
ſup. | O.4 : 4m.
| 4 maior, quàm u.
| Incrementum O.4a3, maius incremento m4. Quod &c.
ſup. | O.12a2, minor eſt, quàm 4q3.
ſup. | O.12a, minor, quàm 6q2.
ſup. | O.4+4 : 4m+4 : 4t.
| O.4+4, minor eſt, quàm 4q+u.
| Incrementum O.4a3, minus incremento q4. Quod &c.
26.b. | O.4a3, pro binario, maior eſt, quàm m4; minor, quàm q4.
| O.4a3, pro ternario, & pro alio quolibet numero, maior eſt, quàm m4; minor quã q4. Quod &c.

Dico O.12a2r incrementum, maius eſſe incremento m4; minus incremento q4: & O.12a2r, maiorem eſſe, quàm m4; minorem, quàm q4.

Demonſtr.

2.b. | Incrementum O.12a2r, eſt O.24ar+O.12r+12t.
8.p. | Incrementum m4, eſt 4m3+6m2+4m+u.

In-

8.p. Incrementum $q4$, eſt $4q3+6q2+4q+u$.

ſup. $O.24ar$, maior eſt, quàm $4m3$.

ſup. $O.12r$, maior, quàm $6m2$.

$12t$, maior, quàm $4m+u$.

Incrementum $O.12a2r$, maius eſt incremẽto $m4$. Quod &c.

ſup. $O.24ar$, minor eſt, quàm $4q3$.

29.h. $O.12r+12t$, minor, quàm $6q2+4q+u$.

Incrementum $O.12a2r$, minus incremento $q4$. Quod &c.

26.h. $O.12a2r$, pro binario, maior, quàm $m4$; minor eſt, quàm $q4$.

$O.12a2r$, pro ternario, maior eſt, quàm $m4$; minor, quàm $q4$, necnon quo alio quolibet numero. Quod &c.

Dico $O.5a4$, incrementum, maius eſſe incremẽto $m5$; minus incremento $q5$: & $O.5a4$, maiorem eſſe, quàm $m5$; minorem, quàm $q5$.

Demonſtr.

2.b. Incrementum $O.5a4$, eſt $O.20a3+O.30a2+O.20a+O.5+5$.

8.p. Incrementum $m5$, eſt $5m4+10m3+10m2+5m+u$.

8.p. Incrementum $q5$, eſt $5q4+10q3+10q2+5q+u$.

ſup. $O.20a3$, maior eſt, quàm $5m4$.

ſup. $O.30a2$ maior eſt, quàm $10m3$.

ſup. $O.20a$, maior eſt, quàm $10m2$.

ſup. | $O.5+5$, maior eſt, quàm $5m+u$.
Incrementum $O.5a4$, maius eſt incremento $m5$. Quod &c.

ſup. | $O.^2 0a3$, minor eſt, quàm $5q4$.
ſup. | $O.3\,0a^2$, minor eſt, quàm $10q3$.
ſup. | $O.^2 0a$, minor eſt, quàm $10q^2$.
ſup. | $O.5+5$ minor eſt, quàm $5q+u$.
Incrementum $O.5a4$, minus eſt incremento $q5$. Quod &c.

26.b. | $O.5a4$, pro binario, maior eſt, quàm $m5$; minor, quàm $q5$.
$O.5a4$, pro ternario, & reliquis numeris, maior eſt, quàm $m5$; minor, quàm $q5$. Quod &c.

Dico $O.20a3r$, incrementum, maius eſſe incremento $m5$; minus incremento $q5$: & $O.20a3r$, maiorem eſſe, quàm $m5$; minorem, quàm $q5$.

Demonſtr.

2. b. | $O.20a3r$ incrementum, eſt $O.60a2r+O.60ar+O.20r+20t$.
8. p. | Incrementum $m5$, eſt $5m4+10m3+10m2+5m+u$.
8. p. | Incrementum $q5$, eſt $5q4+10q3+10q2+5q+u$.
ſup. | $O.60a2r$, maior eſt, quàm $5m4$.
ſup. | $O.60ar$, maior eſt, quàm $10m3$.
ſup. | $O.20r$, maior eſt, quàm $10m2$.
$20t$, maior eſt, quàm $5m+u$.
Incrementum $O.20a3r$, maius eſt incremento $m5$. Quod &c.

ſup. | *O.6oa2r*, minor eſt, quàm 5*q*4.
ſup. | *O.6oar*, minor eſt, quàm 10*q*3.
29. h. | *O.2or*+2*ot*, minor eſt, quàm 10*q*2+5*q*+*u*.
| Incrementum *O.2oa3r*, minus eſt incremento *q*5.
| Quod &c.
26. h. | *O.2oa3r*, pro binario, maior eſt, quàm *m*5; minor, quàm *q*5.
| *O*:2*oa3r*, pro ternario, & reliquis numeris, maior eſt, quàm *m*5; minor, quàm *q*5. Quod &c.

Dico O.3*oa2r2* incrementum, maius eſſe incremento *m*5; minus incremento *q*5: & *O.3oa2r2*, maiorem eſſe, quàm *m*5; minorem, quàm *q*5.

Demonſtr.

2. b. | Incrementum *O.3oa2r2*, eſt O.6*oar2*+O.3*or2* +3*ot2*.
8. p. | Incrementum *m*5, eſt 5*m*4+10*m*3+10*m*2 +5*m*+*u*.
8. p. | Incrementum *q*5, eſt 5*q*4+10*q*3+10*q*2+5*q*+*u*.
ſup. | *O.6oar2*, maior eſt, quàm 5*m*4.
ſup. | *O.3or2*, maior eſt, quàm 10*m*3.
| O.3*ot2*, maior eſt, quàm 10*m*2+5*m*+*u*.
| Incrementum O.3*oa2r2*, maius eſt incremento *m*5. Quod &c.
ſup. | O.6*oar2*, minor eſt, quàm 5*q*4.
29. b. | O.3*or2*+3*ot2*, minor eſt, quàm 10*q*3.
| Incrementum O.3*oa2r2*, minus eſt incremento *q*5. Quod &c.

26. h. | O.3oa2r2, pro binario, maior eſt, quàm $m5$; minor, quàm $q5$.
| O.3oa2r2, pro ternario, aliouc quolibet numero, maior eſt, quàm $m5$; minor, quàm $q5$. Quod &c.

Similiter oſtendetur de omnibus quadratricibus in infinitum, hac ſemper methodo ſeruata.

Quare &c.

Theor. 31. Prop. 31.

QVælibet quadratrix eſt ęqualis ſemitotæ vnitate plus ordinatæ, additis, demptiſque ſemitotis, aliqualiter acceptis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis. *Demonſtr.*

Patet inductione per *6.h.*

22. h. | Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſq; aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm
6. h. | ſit eius baſis. Tota verò vnitate plus ordinata, eſt æqualis ſemitotæ pariter ordinatæ, vnà cum ſemitotis non plus ordinatis, aliqualiter acceptis, & vnitate: & reliquæ totæ non plus ordinatæ, ſunt æquales ſemitotis, non plus ordinatis, aliqualiter acceptis, & vnitati.

Quare quælibet quadratrix eſt æqualis ſemitotæ vnitate plus ordinatæ additis &c.

Theor. 32. Prop. 32.

QVælibet quadratrix eſt æqualis ſeſquitotæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque ſeſquitotis, aliqualiter acceptis, non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis.

Demonſtr.

Patet inductione per 7.*h*.

22. *b*. Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quã
7. *b*. ſit eius baſis. Tota verò, vnitate plus ordinata, æqualis eſt ſeſquitotæ, pariter ordinatæ, demptis, additiſque alijs, acceptis aliqualiter ſeſquitotis non plus ordinatis: & reliquæ totæ non plus ordinatæ, ſunt ſeſquitotis additis, & ſubtractis, non plus ordinatis æquales. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis ſeſquitotæ vnitate plus ordinatę, demptis, additiſque alijs, acceptis aliqualiter ſeſquitotis, non plus ordinatis, quam ſit eius baſis.

Theor. 33. Prop. 33.

QVælibet quadratrix media, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, primæ, vna cum alijs primi lateris ſpeciebus, aliqualiter acceptis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Demonſtr.

Patet inductione per 8.*h*.

22. *b.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis totæ, vnitate plus ordinatæ, quàm ſit eius baſis, demptis, additiſue alijs totis, aliqualiter acceptis,
14. *b.* non plus ordinatis, quàm ſit eius baſis. Tota autẽ vnitate plus ordinata, eſt æqualis quadratrici primæ, in æqueordinata baſi iacenti, vna cum alijs ſpeciebus, in primo latere, in inferioribus baſibus, aliqualiter acceptis. Et reliquæ inferiores totæ, ſimiliter inferioribus quadratricibus, & ſpeciebus ſunt æquales, aliqualiter acceptis. Quare quælibet quadratrix media, eſt æqualis primæ, in eadem baſi, iacenti quadratrici, vnà cum alijs primi late-
2. *p.* ris ſpeciebus, aliqualiter acceptis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Theor. 34. *Prop.* 34.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici. *Demonſtr.*

Patet inductione per *9.b.*

21. *b.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque alijs inferiorum baſiũ ſpeciebus, aliqualiter acceptis, & totis non plus ordinatis, quàm ſit
22. *b.* ipſa baſis. Sunt autem aliæ inferiorum baſium ſpecies, æquales totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa

ipſa baſis, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinę additis vtrimq; totis, nõ plus ordinatis quã
2. p. ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix ſubquadratrici.

Theorema 35. Prop. 35.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque ſemitotis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Demonſtr.

Patet inductione per 10. *h.*

34.*h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix eſt æqualis quadratrici, in eadẽ baſi, ſibi vicinę, additis vtrimq;
6. *h.* totis non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Totæ autem non plus ordinatæ, ſemitotis non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, ſunt æquales. Ergo quælibet quadratrix eſt æqualis quadratrici in eadem baſi ſibi vicinæ, additis vtrimque ſemitotis,
2. *p.* non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Theor. 36. Prop. 36.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque ſeſquitotis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

De-

Demonſtr.

Patet inductione per 11. *h.*

34. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa
7. *h.* baſis. Totæ autem, non plus ordinatæ, ſeſquitotis, non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, ſunt æquales. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadē baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis.
2. *p.* Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Theor. 37. Prop. 37.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, ſibi, in eadem baſi, vicinæ, additis vtrimque primi lateris ſpeciebus, inferiorum baſium. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici. *Demonſtr.*

Patet inductione per 12. *h.*

34. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, ſibi, in eadē baſi vicinę, additis vtrimq; totis, nō plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis, aliqua-
14. *h.* liter acceptis. quæ totę, ſunt æquales ſpeciebus inferiorū baſium, primi lateris, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici ſibi in eadem baſi vicinæ, additis vtrimq; primi la-
2. *p.* teris ſpeciebus, inferiorum baſium. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Pe-

Petrus Mengolus, Illuſtriſſimo D. Fabio Alamandino, Nobili Bononienſi, Domino ſuo maximè recolendo, beatè viuere.

DE quaſi proportionibus, inauditum hucuſque Geometricum elementum, ad theoremata, cæteroqui difficillima, facili negotio ſoluenda, cum inſtituerim: ex ijs, qui meam ſcholam frequentarunt, præter te, Iuuenis Illuſtriſsime, neminem habeo ſatis diſpoſitum; qui rem ſubtiliſsimam valeat intelligere. Cumque verear, ſi forte poſsit intelligi, quod legendum omnibus propono; niſi priùs ipſe oretenus, alicui eius doctrinæ ſatis capaci, meam ſententiam explicuerim: apud te precator acceſsi; vt dignareris (licet vacationum tempore admodum neceſſario) ruralibus partim delicijs, partim negotijs quidquam detrahere; priuatiſque meis lucubrationibus auditor interuenire. Pro tua benignitate ſtatim, quod poſtulabam, im-

ple-

pleuiſti : & conceſſum tibi diuinitus intellectum ſubtiliſsimum, inuentis meis, ea intentione adhibuiſti; vt & me ipſum inuentorem, & prælectorem, in plurimis etiam præuenires. Plurimas itaque tibi primùm gratias profiteor: quod tàm humiliter, & liberaliter, me de ſtudijs meis priuatis tecum patiaris communicare. Deinde illas eaſdem lucubrationes, vnà cum alijs præcedentium elementorum, pleniùs tractatas, prælegendas offero, ſcriptis præſentibus; antequam totum opus publici iuris eſſe incipiat: non quaſi gratiam redditurus; ſed in mei erga te obſequij monimentum.

Vale.

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM TERTIVM.

DEFINITIONES.

1. RAtio indeterminata determinabilis, quæ in determinari, poteſt eſſe maior, quam data, quælibet, quatenus ita determinabilis, dicetur Quaſi infinita.

2. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quaſi nulla.

3. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet maior inæqualitas; & maior, quàm data quælibet minor inæqualitas, quatenus ita determinabilis, dicetur, Quaſi æqualitas. Vel aliter. quæ poteſt eſſe propior æqualitati, quàm data quælibet non æqualitas, quatenus talis, dicetur, Quaſi æqualitas.

4. Et quæ poteſt eſſe minor, quàm data quælibet maior, propoſitâ quadam ratione; & maior, quàm data quælibet minor, propoſitâ eâdem ratione, quatenus ita determina-

minabilis, dicetur, Quaſi eadem ratio. Vel aliter. quæ poteſt eſſe propior cuidam propoſitæ rationi, quàm data quælibet alia non eadem, quatenus talis, dicetur, Quaſi eadem.

5. Et rationum quaſi earundem inter ſe, termini dicentur, Quaſi proportionales.

6. Et quaſi æqualitatum, dicentur, Quaſi æquales.

Theor. 1. Prop. 1.

INæqualium rationum maior, permutando, eſt maior, item componendo, & diuidendo, eſt maior.

Demonſtr.

def. 8. 5. Maioris enim rationis antecedens, maior eſt, quàm proportionalis, cum reliquis terminis: & dempta quantitate, vt proportionalis relinquatur;
2. p. permutando, & componendo, & diuidendo, pro-
8. 5. portionalis erit, & antecedens: eâdemq reſtituta quantitate, erit antecedens maior, quàm proportionalis, permutatæ, aut compoſitæ, aut diuiſæ proportionalitatis. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 2. Prop. 2.

INæqualium rationum maior, conuertendo, eſt minor.

Demonſtr.

def. 8. 5. Nam maioris rationis conſequens eſt minor, quàm proportionalis, cum reliquis terminis: factuſque conuertendo antecedens, adhuc eſt minor, quàm proportionalis, cum reliquis terminis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

INæqualium rationum maior, per conuerſionem rationis, eſt minor.

 Hy-

Demonſtr.

Patet inductione per 11.*h.*

34. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix eſt æqualis quadratrici, in eadem baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa
7. *h.* baſis. Totæ autem, non plus ordinatæ, ſeſquitotis, non plus ordinatis, acceptis aliqualiter, ſunt æquales. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, in eadē baſi, ſibi vicinæ, additis vtrimque totis, non plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis.
2. *p.* Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Theor. 37. Prop. 37.

QVælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, ſibi, in cadem baſi, vicinæ, additis vtrimque primi lateris ſpeciebus, inferiorum baſium. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici. *Demonſtr.*

Patet inductione per 12.*h.*

34. *h.* Deinde ſic. Quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici, ſibi, in eadē baſi vicinę, additis vtrinq; totis, nō plus ordinatis, quàm ſit ipſa baſis, aliqua-
14. *h.* liter acceptis. quæ totę, ſunt æquales ſpeciebus inferiorū baſium, primi lateris, aliqualiter acceptis. Ergo quælibet quadratrix, eſt æqualis quadratrici ſibi in cadem baſi vicinæ, additis vtrimq; primi la-
2. *p.* teris ſpeciebus, inferiorum baſium. Et ſubquadratrix, ſubquadratrici.

Pe-

Petrus Mengolus, Illuſtriſſimo D. Fabio Alamandino, Nobili Bononienſi, Domino ſuo maximè recolendo, beatè viuere.

DE quaſi proportionibus, inauditum hucuſque Geometricum elementum, ad theoremata, cæteroqui difficillima, facili negotio ſoluenda, cum inſtituerim: ex ijs, qui meam ſcholam frequentarunt, præter te, Iuuenis Illuſtriſsime, neminem habeo ſatis diſpoſitum; qui rem ſubtiliſsimam valeat intelligere. Cumque verear, ſi forte poſsit intelligi, quod legendum omnibus propono; niſi priùs ipſe oretenus, alicui eius doctrinæ ſatis capaci, meam ſententiam explicuerim: apud te precator acceſsi; vt dignareris (licet vacationum tempore admodum neceſſario) ruralibus partim delicijs, partim negotijs quidquam detrahere; priuatiſque meis lucubrationibus auditor interuenire. Pro tua benignitate ſtatim, quod poſtulabam, imple-

ple-

p. h.	*a3 ; b3*: maior, quàm *a2 ; b2*. Quod &c.
2. h.	*b3 ; a3*: minor, quàm *b2 ; a2*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 6. Prop. 6.

SI prima ad ſecundam, maiórem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: etiam æqueproportionales cum prima, & tertia, ad æqueproportionales cum ſecunda, & quarta, maiorem habebunt rationem, ſi prout ſibi reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

a; b: maior, quàm *c ; d*.

a; c: e; f.

b; d: g; h.

Dico *e; g*: maiorem eſſe, quàm *f; h*.

Demonſtr.

hypoth.	*a; b*: maior, quàm *c; d*.
p. h.	*a; c*: maior, quàm *b; d*.
13. 5.	*e; f*: maior, quàm *g; h*.
p. h.	*e; g*: maior, quàm *f; h*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

RAtio quaſi infinita, conuertendo, eſt quaſi nulla.

Hypoth.

Eſto ratio *A* ad *B*, quaſi infinita.

Dico conuertendo, *B* ad *A*, eſſe quaſi nullam.

Præ-

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonſtr.

def.1.h. | Ratio *A* ad *B*, maior poteſt eſſe, quàm *d* ad *c*:
2. h. | Ergo conuertendo, *B* ad *A*, minor poteſt eſſe, quàm *c* ad *d*.
def.2.h. | Ergo *B* ad *A*, eſt ratio quaſi nulla. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 8. Propoſ. 8.

RAtio quaſi infinita, componendo, eſt quaſi infinita: item diuidendo, eſt quaſi infinita.

Hypoth.

Eſto ratio *A* ad *B*, quaſi infinita.

Dico componendo *A+B* ad *B*, eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*: quod ſi *c*, eſt maior, quàm *d*; ſit exceſſus *e*.

Demonſtr.

| Siquidem *c* eſt æqualis, vel minor, quàm *d*: pa-
8. 5. | tet, quod *A+B* ad *B*, maior poteſt eſſe, quàm
def. 1. | *c* ad *d*. Quòd ſi *c* eſt maior, quàm *d*: quoniam
p. h. | *A* ad B, maior poteſt eſſe, quàm *e* ad *d*: ergo
| componendo, *A+B* ad *B*, maior poteſt eſſe, quàm
præpar. | *e+d* ad *d*: ſed *e+d* eſt *c*: ergo *A+B* ad *B*, ma-
def. 1. | ior poteſt eſſe, quàm *c* ad *d*. Ergo *A+B* ad *B*,
| ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Dico

Dico diuidendo $A - B$ ad B, rationem eſſe quàſi infinitam.

Demonſtr.

def. 1.	Ratio A ad B, poteſt eſſe maior, quàm $c+d$ ad d:
p. h.	Ergo diuidendo $A - B$ ad B, poteſt eſſe maior,
def. 1.	quàm c ad d. Ergo $A - B$ ad B, ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Pro. 9.

Ratio quaſi infinita, per conuerſionem rationis, eſt quaſi æqualitas.

Hypoth.

Eſto ratio A ad B, quaſi infinita.

Dico, per conuerſionem rationis, A ad $A - B$, eſſe quaſi æqualitatem.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio non æqualitas, cuius maior terminus c, minor d.

Demonſtr.

def. 1. h.	Ratio A ad B, poteſt maior eſſe, quàm c ad
3. h.	$c - d$: ergo, per conuerſionem rationis, A ad $A - B$, poteſt minor eſſe, quàm c ad d: & eſt maior æqualitate: ergo A ad $A - B$, eſt propior
def. 3. h.	æqualitati, quàm ſit propoſita ratio c ad d: ergo ratio A ad $A - B$, eſt quaſi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 10. *Prop.* 10.

Ratio quaſi nulla, conuertendo, eſt quaſi infinita.

Hypoth.

Eſto ratio *A* ad *B*, quaſi nulla.

Dico conuertendo, rationem *B* ad *A*, eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonſtr.

def.2.h. Ratio *A* ad *B*, minor poteſt eſſe, quàm *d* ad *c*: ergo conuertendo, ratio *B* ad *A*, maior poteſt
2. h.
def.1.h. eſſe, quàm *c* ad *d*: ergo ratio *B* ad *A*, eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 11. *Prop.* 11.

Ratio quaſi nulla, componendo, eſt quaſi æqualitas.

Hypoth.

Eſto ratio *A* ad *B*, quaſi nulla.

Dico componendo, rationem *A+B* ad *B*, eſſe quaſi æqualitatem.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*, non æqualitas; cuius maior terminus *c*, minor *d*.

Demonſtr.

def.2.h. Ratio *A* ad *B*, poteſt minor eſſe, quam *c—d*
2. h. ad *d*: ergo conuertendo, *B* ad *A*, poteſt maior
p. h. eſſe, quam *d* ad *c—d*: ergo componendo *A+B*

3. h. ad A, poteſt maior eſſe, quàm c ad $c - d$: ergo per conuerſionem rationis $A+B$ ad B poteſt minor eſſe, quàm c ad d: & eſt maior æqualitate: ergo
def.3.h. ergo $A+B$ ad B, eſt propior æqualitati, quàm c ad d: ergo $A+B$ ad B, eſt quaſi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 12. *Prop.* 12.

EX rationibus quaſi infinitis, ex æquali, quaſi infinitæ ſunt rationes compoſitæ.

Hypoth.

A ad B, & C ad D, ſunto rationes quaſi infinitæ.

Dico ex æquali, ex A ad B, & C ad D compoſitam, eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur e ad f. ratio quælibet.

Demonſtr.

Quoniam A ad B, & C ad D, ſunt rationes
def.1.h. quaſi infinitæ: poſunt eſse A ad B, maior, quàm
4. h. e ad f; & C ad D, maior æqualitate. Quare & vtriſque A ad B, & C ad D, compoſita ratio, poteſt eſſe maior, quàm ex e ad f, & ex
7. 5. æqualitate, compoſita; ideſt, quàm ipſa e ad f
def.1.h. ratio. Quare ex vtriſque A ad B, & C ad D, compoſita ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. Prop. 13.

EX rationibus quaſi nullis, ex æquali, quaſi nullæ ſunt rationes compoſitæ.

Hypoth.

A ad *B*, & *C* ad *D*, ſunto rationes quaſi nullæ.

Dico ex æquali, ex *A* ad *B*, & *C* ad *D* rationem compoſitam, eſſe quaſi nullam.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *e* ad *f*.

Demonſtr.

Quoniam *A* ad *B*, & *C* ad *D* ſunt rationes
def. 2. h. quaſi nullæ, poſſunt eſſe, *A* ad *B*, minor, quàm *e* ad *f*: & *C* ad *D*, minor æqualitate. Quare
4. h. ex vtriſque *A* ad *B*, & *C* ad *D*, compoſita ratio, poteſt eſſe minor, quàm ex vtriſque *e* ad *f*,
7. 5. & ex æqualitate compoſita; ideſt, quàm ipſa *e* ad *f*. Quare ex vtriſque *A* ad *B*, & *C* ad *D*, com-
def. 2. h. poſita ratio eſt quaſi nulla. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 14. Prop. 14.

RAtio quaſi æqualitas, conuertendo, eſt quaſi æqualitas.

Hypoth.

Eſto ratio *A* ad *B*, quaſi æqualitas.

Dico conuertendo, *B* ad *A*, quaſi æqualitatem eſſe.

Præpar.

Aſſumantur duæ quælibet rationes, *c* ad *d*, maior æqualitate: & *e* ad *f*, minor.

Demonſtr.

Quoniam ratio *c* ad *d*, eſt maior æqualitate;
2. b. ergo conuertendo, *d* ad *c*, eſt minor æqualitate:
2. b. & quoniam *e* ad *f*, eſt minor æqualitate; ergo
hypoth. conuertendo *f* ad *e*, eſt maior æqualitate. Et
def.3.b. quoniam *A* ad *B*, eſt quaſi æqualitas: ergo poteſt *A* ad *B*, maior eſſe, quàm *d* ad *c*, & minor,
2. b. quàm *f* ad *e*: ergo conuertendo poteſt *B* ad *A*, minor eſſe, quàm *c* ad *d*, & maior, quàm *e* ad *f*.
def 3.b. Ergo *B* ad *A*, eſt quaſi æqualitas. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 15. *Prop.* 15.

RAtio quaſi æqualitas, componendo, eſt quaſi dupla.

Hypoth.

Eſto ratio *A* ad *B*, quaſi æqualitas.

Dico componendo *A*+*B* ad *B*, eſſe quaſi duplam.

Præpar.

Aſſumãtur duæ quælibet rationes *c* ad *d*, maior, quàm dupla: & *e* ad *f*, maior quidem æqualitate, ſed minor, quàm dupla.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam *c* ad *d*, eſt maior, quàm dupla,
p. b. diuidendo, *c*—*d* ad *d*, eſt maior æqualitate: & quo-

conſtr. quoniam *e* ad *f*, eſt maior æqualitate, ſed mi-
p.h. nor, quàm dupla; diuidẽdo, *e*---*f* ad *f*, eſt minor
def 3.h. æqualitate. Et quoniam *A* ad *B*, eſt quaſi æqua-
litas; poteſt *A* ad *B*, minor eſſe, quàm *c*---*d* ad
p.h. *d*; & maior, quàm *e*---*f* ad *f*. Ergo compo-
nendo, poteſt *A*+*B* ad *B*, minor eſſe, quàm *c* ad
def.4.h. *d*; & maior, quàm *e* ad *f*. Ergo *A*+*B* ad *B*,
eſt quaſi dupla. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

RAtio quaſi æqualitas, diuidendo, eſt quaſi nulla.

Hypoth.

Eſto ratio *A* ad *B* quaſi æqualitas: & eſto *A* maior, quàm *B*.

Dico diuidendo *A*---*B* ad *B*, eſſe quaſi nullam.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonſtr.

hyp. Quoniam *A* ad *B*, eſt quaſi æqualitas; & eſt *A*
maior, quàm *B*; & *c*+*d* maior, quàm *d*: ergo
def.3.h. poteſt *A* ad *B* ratio, minor eſſe, quàm *c*+*d* ad
p. h. *d*: ergo diuidendo poteſt *A*---*B* ad *B* ratio, mi-
def.3.h. nor eſſe, quàm *c* ad *d*: ergo *A*---*B* ad *B*, ratio
eſt quaſi nulla. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 17. *Prop.* 17.

RAtio quaſi æqualitas, per conuerſionem rationis eſt quaſi infinita.

Hypoth.

Eſto ratio quaſi æqualitas *A* ad *B*: & eſto *A* maior, quàm *B*.

Dico, per conuerſionem rationis, *A* ad *A*---*B*, rationem eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio maioris inæqualitatis *c* ad *d*.

Demonſtr.

hyp. Quoniam *A* ad *B*, eſt quaſi æqualitas; & eſt *A*
def.3.h. maior, quàm *B*; item *c* maior, quàm *c*---*d*: er-
3.h. go ratio *A* ad *B*, poteſt minor eſſe, quàm *c* ad
c---*d*: ergo per conuerſionem rationis, *A* ad
A---*B* ratio, poteſt maior eſſe, quàm *c* ad *d*: &
eſt maior omnibus, tùm æqualitatis, tùm minoris
def.p.h. inæqualitatis rationibus: ergo *A* ad *A*---*B* ratio
eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 18. *Prop.* 18.

QVæ eidem ſunt quaſi æqualia, inter ſe ſunt quaſi æqualia.

Hypoth.

Sunt *A*, *B*, quaſi æqualia: item *B*, *C*, quaſi æqualia.

Dico *A*, *C*, quaſi æqualia eſſe.

Præ-

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *d* ad *e*, non æqualitas: cuius maior terminus *d*, minor *e*. & inter *d*, *e*, media ſumatur *f*.

Demonſtr.

def. 3. h. Quoniam *A*, *B*, ſunt quaſi æqualia, poteſt *A* ad *B*, minus eſſe, quàm *d* ad *f*: & maius, quàm *f* ad *d*. Item *B* ad *C* poteſt minus eſſe, quàm *f* ad *e*, & maius, quàm *e* ad *f*. Ergo ex æquali, poteſt *A* ad *C* minus eſſe, quàm *d* ad *e*; & maius, quàm *e* ad *d*, ergo *A* ad *C*, quaſi eſt æqualis. Quod &c.

4. h.

def. 3. h.

Quare &c.

Theor. 19. Propoſ. 19.

QVæ eidem ſunt quaſi eędem rationes, inter ſe ſunt quaſi eędem.

Hypoth.

A ad *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C* ad *D*: & *C* ad *D*, quaſi eadem, quæ *E* ad *F*.

Dico *A* ad *B*, quaſi eamdem eſſe quæ *E* ad *F*.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *g* ad *h*, maior, quàm cui propior poteſt eſſe *E* ad *F*: & quælibet *i* ad *l*, minor.

Demonſtr.

def. 4. h. Quoniam *C* ad *D*, quaſi eadem eſt, quæ *E* ad *F*: poteſt *C* ad *D*, minor eſſe, quàm *g* ad *h*; & maior, quàm *i* ad *l*. Ergo *g* ad *h*, maior eſt,

a. h.

quàm

quàm cui propior poteſt eſſe C ad D; & i ad l,
def.4.h. minor. Et quoniam A ad B, quaſi eſt eadem,
quæ C. ad D: ergo A ad B, poteſt eſſe minor,
conſtr. quàm g ad h; & maior, quàm i ad l. Sed g ad
h eſt quælibet aſſumpta, maior, quàm cui propior poteſt eſſe E ad F; & i ad l, eſt quælibet
def.4.h. aſſumpta, minor: ergo A ad B, eſt quaſi eadem,
quæ E ad F. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. Prop. 20.

QVaſi proportionales, conuertendo, ſunt quaſi proportionales.

Hypoth.

Sint quaſi proportionales A ad B, vt C ad D.

Dico conuertendo, quaſi proportionales eſſe B ad A, vt D ad C.

Præpar.

Sumatur quælibet e ad f, maior, quàm cui propior poteſt eſſe D ad C: & quælibet g ad h,
2. h. minor: & erit conuertendo, ſumpta f ad e, minor, quàm cui propior poteſt eſſe C ad D; & h ad g, maior.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam A ad B, quaſi eſt eadem, quæ C
def.4.h. ad D: ergo A ad B, poteſt eſſe minor, quàm h
2. h. ad g; & maior, quàm f ad e: ergo conuertendo,

do, *B* ad *A*, poteſt eſſe maior, quàm *g* ad *h*; & minor, quàm *e* ad *f*: ergo *B* ad *A*, quaſi eadem eſt, quæ *D* ad *C*. Quod &c.

def.4.h.

Quare &c.

Theor. 21. Prop. 21.

Ex quaſi ijſdem rationibus, ex æquali, quaſi eędem ſunt rationes compoſitæ.

Hypoth.

A	*B*		*C*	*D*
E	*F*		*G*	*H*
i	*n*	*r*	*p*	*k*
l	*o*	*s*	*q*	*m*

A ad *B*, quaſi eadem ratio eſt, quæ *C* ad *D*: & *E* ad *F*, quaſi eadem, quæ *G* ad *H*.

Dico ex æquali, ex *A* ad *B*, & *E* ad *F* compoſitam, quaſi eamdem eſſe, quæ ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita.

Præpar.

Aſſumatur *i* ad *k*, quælibet ratio maior, quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita: item aſſumatur quælibet *l* ad *m*, minor. Deinde fiant *i* ad *n*, & *l* ad *o*, ſicut cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*: item *p* ad *k*, & *q* ad *m*, ſicut cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*. Denique ſumatur inter *n*, *p*, media quælibet quantitas *r*: & inter *o*, *q*, media quælibet *s*.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam *i* ad *k*, maior eſt, quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita; & eſt *i* ad *n*, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*, &
4. *h.* *p* ad *k*, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*: ergo *i* ad *k*, maior eſt, quàm, quæ ex *i* ad *n*, & ex *p* ad k, compoſita. Ergo *n*, maior eſt, quà n *p*. Si
p. h. enim *n*, eſſet æqualis ipſi *p*: ex *i* ad *n*, & ex ęqualitate, & ex *p* ad *k*, cōpoſita ratio *i* ad *k*, eſſet eadem, quæ ex ea, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*, ex æqualitate, & ex ea, cui propior poteſt eſſe *G*
4. *h.* ad *H*, compoſita eſt; contra aſſumptum. Quod ſi *n*, eſſent minor, quàm *p*: ex *i* ad *n*, & minori inæqualitate, & *p* ad *k*, compoſita ratio *i* ad k, eſſet minor, quàm quæ ex ea, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*, ex æqualitate, & ex ea, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*, compoſita eſt; contra idem aſſumptum.

conſtr. Ergo *n*, maior eſt, quàm *p*: & *r*, minor, quàm
8. 5. *n*; & maior quàm *p*: habetque *i* ad *r*, maiorem rationem, quàm *i* ad *n*; ideſt maiorem, quàm,
8. 5. cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*: habet quoque *r* ad k, maiorem, quàm *p* ad k; ideſt, maiorem, quàm, cui propior poteſt eſſe *G* ad *H*.

conſtr. Similiter, quoniam *l* ad *m*, minor eſt, quàm cui propior poteſt eſſe ex *C* ad *D*, & *G* ad *H* compoſita: & eſt *l* ad *o*, eadem, cui propior po-
4. *h.* teſt eſſe *C* ad *D*: & *q* ad *m*, eadem, cui pro-

pior

A	*B*		*C*	*D*
E	*F*		*G*	*H*
i	*n*	*r*	*p*	*k*
l	*o*	*s*	*q*	*m*

4. *b.* pior poteſt eſſe *G* ad *H*: ergo *l* ad *m*, minor
eſt, quàm quæ eſt ex *l* ad *o*, & *q* ad *m* compo-
ſita. Ergo *o*, minor eſt, quàm *q*. demonſtrari
enim poteſt vt ſupra, quod ſi *o*, eſſet æqualis, vel
p. b. maior, quàm *q*: eſſet *l* ad *m* ratio non minor,
4. *b.* quàm cui propior poteſt eſſe, ex *C* ad *D*, & *G* ad
H compoſita; contra aſſumptum.

conſtr. Cum itaque *o*, ſit minor, quàm *q*: erit *s*, ma-
8. 5. ior, quàm *o*; minor, quàm *q*: habetque *l* ad *s*,
minorem rationem, quàm *l* ad *o*; ideſt, minorem,
8. 5. quàm, cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*. habet quo-
que *s* ad *m*, minorem rationem, quàm *q* ad *m*:
ideſt, minorem, quàm, cui propior poteſt eſſe
G ad *H*.

ſup. Itaque *i* ad *r*, maior eſt, quàm, cui propior
hyp. poteſt eſſe *C* ad *D*: & *l* ad *s*, minor. Sed *A* ad
def.4.b. *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C* ad *D*: ergo *A* ad *B*,
poteſt eſſe minor, quàm *i* ad *r*, & maior, quàm
ſup. *l* ad *s*. Similiter *r* ad k maior eſt, quàm, cui pro-
hypoth. pior poteſt eſſe *G* ad *H*; & *s* ad *m*, minor: & eſt
def.4.b. *E* ad *F*, quaſi eadem, quæ *G* ad *H*: ergo *E* ad
F poteſt eſſe minor, quàm *r* ad k; & maior,
4. *b.* quàm *s* ad *m*. Ergo ex æquali, poteſt ex *A* ad *B*,

A	*B*		*C*	*D*
E	*F*		*G*	*H*
i	*n*	*r*	*p*	*k*
l	*o*	*s*	*q*	*m*

& *E* ad *F* compoſita, minor eſſe, quàm, quæ ex *i* ad *r*, & *r* ad k, componitur, *i* ad k; & maior, quàm, quæ ex *l* ad *s*, & *s* ad *m*, compo-
conſtr. nitur, *l* ad *m*. Eſt autem *i* ad k, ſumpta quælibet maior, quàm cui propior poteſt eſſe compoſita ex *C* ad *D*, & *G* ad *H*; & *l* ad *m*, minor.
def.4.b. Ergo compoſita ex *A* ad *B*, & *E* ad *F*, quaſi eadem eſt, quæ compoſita ex *C* ad *D*, & *G* ad *H*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. Prop. 22.

QVaſi proportionales, permutando, ſunt quaſi proportionales. *Hypoth.*

Sint quaſi proportionales *A* ad *B*, vt *C* ad *D*.

Dico permutando, quaſi proportionales eſſe *A* ad *C*, vt *B* ad *D*. *Demonſtr.*

hypoth. Sunt enim quaſi eędem rationes *A* ad *B*, & *B*
21. b. ad *C*; quæ *B* ad *C*, & *C* ad *D*: ergo ex æquali, *A* ad *C*, & *B* ad *D*, rationes compoſitę ſunt qua-
def.5.b. ſi eædem: Ergo *A* ad *C*, & *B* ad *D*, ſunt quaſi proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Digitized by Google

Theor. 23. Prop. 23.

RAtiones quaſi eædem, componendo, ſunt quaſi eædem.

Hypoth.

A ad *B*, quaſi eadem eſto, quæ *C* ad *D*.

Dico componendo *A*+*B* ad *B*, quaſi eandem eſſe, quæ *C*+*D* ad *D*.

Præpar.

Aſſumatur *e* ad *f*, quælibet ratio maior, quàm cui propior poteſt eſſe *C*+*D* ad *D*: itē *g* ad *h*, quælibet maioris inæqualitatis, ſed minor.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam *e* ad *f*, maior eſt, quàm cui propior
p. h. poteſt eſſe *C*+*D* ad *D*: diuidendo, *e*—*f* ad *f*, maior eſt, quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*.
conſtr. Item quoniam *g* ad *h*, minor eſt, quàm cui pro-
p. h. pior poteſt eſſe *C*+*D* ad *D*: diuidendo *g*—*h* ad *h* minor eſt, quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*.
hypoth. Sed *A* ad *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C* ad *D*: er-
def. 4. h. go *A* ad *B*, poteſt eſſe minor, quàm *e*—*f* ad *f*; &
p. h. maior, quàm *g*—*h* ad *h*. Ergo componendo *A*+*B* ad *B* poteſt eſſe minor, quàm *e* ad *f*; &
def. 4. h. maior, quàm *g* ad *h*. Ergo *A*+*B* ad *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C*+*D* ad *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 24. Prop. 24.

RAtiones quaſi eædem, diuidendo, ſunt quaſi eædem.

Hypoth.

Sint rationes quaſi eædem *A* ad *B*, & *C* ad *D*.

Dico diuidendo, quaſi eaſdem eſſe rationes *A*---*B* ad *B*, & *C*---*D* ad *D*.

Præpar.

Aſſumatur *e* ad *f*, quęlibet ratio maior, quàm cui propior poteſt eſſe *C*---*D* ad *D*: & aſſumatur *g* ad *h*, quælibet minor.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam *e* ad *f*, maior eſt, quàm, cui propior
p. h. poteſt eſſe *C*---*D* ad *D*; & *g* ad *h*, minor: ergo componendo *e*+*f* ad *f*, maior eſt, quàm cui propior poteſt eſſe *C* ad *D*; & *g*+*h* ad *h*, minor.
hyp. Sed *A* ad *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C* ad *D*: er-
def. 4. h. go *A* ad *B* poteſt minor eſſe, quàm *e*+*f* ad *f*; &
p. h. maior, quàm *g*+*h* ad *h*. Ergo diuidendo *A*---*B* ad *B*, poteſt minor eſſe, quàm *e* ad *f*; & maior,
def. 4. h. quàm *g* ad *h*. Ergo *A*---*B* ad *B*, quaſi eadem eſt, quæ *C*---*D* ad *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 25. Prop. 25.

RAtiones quaſi eędem, per conuerſionem rationis, ſunt quaſi eędem.

Hypoth.

Hypoth.

Sint rationes quaſi eædem, *A* ad *B*, & *C* ad *D*.

Dico per conuerſionem rationis, quaſi eaſdem eſſe rationes *A* ad *A*—*B*, & *C* ad *C*—*D*.

Demonſtr.

hyp.	*A*; *B*: quaſi *C*: *D*.
24. *h.*	*A*---*B*; *B*: quaſi *C*—*D*; *D*.
20. *h.*	*B*; *A*—*B*: quaſi *D*; *C*---*D*.
21. *h.*	*A*; *A*---*B*: quaſi *C*; *C*---*D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. Propoſ. 26.

SI quotcunque quantitates fuerint quaſi proportionales, colligendo, quaſi proportionales erunt, omnes antecedentes, ad omnes conſequentes.

Hypoth.

A; *B*: quaſi *C*; *D*:

Dico *A*+*C*; *B*+*D*: quaſi *C*; *D*.

Demonſt.

hypoth.	*A*; *B*: quaſi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quaſi *B*; *D*.
23. *h.*	*A*+*C*; *C*: quaſi *B*+*D*; *D*.
22. *h.*	*A*+*C*; *B*+*D*: quaſi *C*: *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Pro. 27.

SI prima ad ſecundam quaſi proportionalis fuerit, ſicut tertia ad quartam; & quinta ad ſecundam, quaſi ſicut

ſexta

ſexta ad quartam: erit prima cum quinta ad ſecundam, quaſi ſicut tertia cum ſexta ad quartam.

Hypoth.

A; *B*: quaſi *C*; *D*.
E; *B*: quaſi *F* ad *D*.
Dico *A* + *E*; *B*: quaſi *C* + *F*; *D*.

Præpar.

hypoth.	*A*; *B*: quaſi *C*; *D*.
22. *h.*	*A*; *C*: quaſi *B*; *D*.
hypoth.	*E*; *B*: quaſi *F*; *D*.
22. *h.*	*E*; *F*: quaſi *B*; *D*.
19. *h.*	*A*; *C*: quaſi *E*; *F*.
22. *h.*	*A*; *E*: quaſi *C*; *F*.
23. *h.*	*A* + *E*; *E*: quaſi *C* + *F*; *F*.
hypoth.	*E*; *B*: quaſi *F*; *D*.
21. *h.*	*A* + *E*; *B*: quaſi *C* + *F*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 28. Prop. 28.

QVaſi partes, cum quaſi æquemultiplicibus, in quaſi eadem ſunt ratione, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

A; *B*: quaſi tripla.
C; *D*: quaſi tripla.
Dico *A*; *C*: quaſi *B*; *D*.

De-

Digitized by Google

Demonſtr.

18. *b.* | *A*; *B*: quaſi *C*; *D*.
22. *b.* | *A*; *C*: quaſi *B*; *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. *Prop.* 29.

SI totam ad totam quaſi proportionalis fuerit, vt ablata ad ablatam: & reliqua ad reliquam, quaſi proportionalis erit, vt tota ad totam.

Hypoth.

A; *B*: quaſi *C*: *D*.

Dico *A*---*C*; *B*---*D*: quaſi *A*; *B*.

Demonſtr.

hypoth. | *A*; *B*: quaſi *C*; *D*.
22. *b.* | *A*; *C*: quaſi *B*; *D*.
25. *b.* | *A*; *A*---*C*: quaſi *B*; *B*---*D*.
22. *b.* | *A*---*C*; *B*---*D*: quaſi *A*; *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 30. *Prop.* 30.

QVantitates quaſi proportionales, & per homologiam, ſunt quaſi proportionales.

Demonſtr.

Nam conuertendo, quaſi proportionales fiunt, 20.*h*: & colligendo, 26, & 27. *h*: & æquemultiplicando, & æquepartiendo, 28.*h*: & permutando, 22.*h*: & diuidendo, 24.*h*: & componendo, 23.*h*: & homologas ab homologis

Q

mologis auſerendo, 29.*h*: & per conuerſionem ratiónis, 25.*h*: & ex æquali, 21.*h*: & coniunctis omnifariam argumentis huiuſmodi, quocunque ordine, per homologiam, quaſi proportionales fiunt.

Theor. 31. Prop. 31.

QVaſi æquales, ad quaſi æquales, rationes habent, vel quaſi infinitas vtraſque, vel quaſi nullas, vel quaſi eaſdem inter ſe.

Hypoth. comm.

A, B ſunt quaſi æquales.

C, D ſunt quaſi æquales.

Hypoth. p. caſus.

A; C: eſt quaſi infinita.

Dico B; D: eſſe quaſi infinitam.

Præpar.

Aſſumatur e ad f, quælibet ratio: vnde fit componendo $e+f$ ad f: deinde per conuerſionem rationis $e+f$ ad e: & conuertendo e ad $e+f$.

Demonſtr.

def.3.b.	B; A: poteſt maior eſſe, quàm e; $e+f$.
def.p.b.	A; C: poteſt maior eſſe, quàm $e+f$; f.
4. *h.*	B; C: poteſt maior eſſe, quàm e; f.
def.p.b.	B; C: ratio eſt quaſi infinita.
def.p.b.	B; C: poteſt maior eſſe, quàm $e+f$; f.
def.3.b.	C; D: poteſt maior eſſe, quàm e; $e+f$.
4. *b.*	B; D: poteſt maior eſſe, quàm e; f.

B; D:

def.p.b. | *B*; *D*: ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Hypoth. 2. caſus.

A; *C*: eſt quaſi nulla.

Dico *B*; *D*: eſſe quaſi nullam.

Demonſtr.

10. *b.* | *C*; *A*: quaſi infinita.
ſup. | *D*; *B*: quaſi infinita.
7. *b.* | *B*; *D*: quaſi nulla. Quod &c.

Hypoth. 3. caſus.

A; *C*: neq; quaſi infinita, neq: quaſi nulla eſt.

Dico *B*; *D*: quaſi eſſe *A*; *C*.

Demonſtr.

B ad *D*, neque eſt quaſi infinita, neque quaſi nulla:
ſup. | alioquin *A* ad *C* eſſet quaſi infinita, vel quaſi nulla, contra hypotheſim.
19. *b.* | *A*; *B*: quaſi *C*; *D*.
22. *b.* | *A*; *C*: quaſi *B*; *D*: Quod &c.

Quare &c.

Theorema 32. Prop. 32.

SI prima ad ſecundam, rationem habuerit quaſi infinitam; item ad tertiam, rationem quaſi infinitam: habebit & ad vtriuſque ſummam, & ad vtriuſque differentiam, rationem quaſi infinitam.

Hypoth.

A; *B*: quaſi infinita.

A; *C*: quaſi infinita.

 Dico

Dico $A ; B + C$: quaſi infinitam eſſe.

Et $A ; B - C$: quaſi infinitam eſſe.

Demonſtr.

hypoth.	$A ; B$: quaſi infinita.
8. *h.*	$A + B ; B$: quaſi infinita.
9. *h.*	$A + B ; A$: quaſi æqualis.
hypoth.	$A ; C$: quaſi infinita.
31. *h.*	$A + B ; C$: quaſi infinita.
8. *h.*	$A + B + C ; C$: quaſi infinita.
9. *h.*	$A + B + C ; A + B$: quaſi æqualis.
ſup.	$A + B ; A$: quaſi æqualis.
18. *h.*	$A + B + C ; A$: quaſi æqualis.
16. *h.*	$B + C ; A$: quaſi nulla.
10. *h.*	$A ; B + C$: quaſi infinita. Quod &c.
ſup.	$A + B ; C$: quaſi infinita.
8. *h.*	$A + B - C ; C$: quaſi infinita.
7. *h.*	$C ; A + B - C$: quaſi nulla.
11. *h.*	$A + B ; A + B - C$: quaſi æqualis.
ſup.	$A ; A + B$: quaſi æqualis.
18. *h.*	$A + B - C ; A$: quaſi ęqualis.
17. *h.*	$A + B - C ; B - C$: quaſi infinita.
8. *h.*	$A ; B - C$: quaſi infinita. Quod &c.

. Quare &c.

Theor. 33. *Propoſ.* 33.

SI fuerint tres termini, primus indeterminatus, reliqui duo determinati; fuerit autem primus ad ſecundum quaſi

Digitized by Google

[q]uaſi æqualis: habebit ſecundus ad tertium eandem ratio-[n]em, quàm quaſi habet primus.

Hypoth.

Tres termini ſunt, primus indeterminatus *A*; reliqui [d]uo determinati, *b*, & *c*: & eſt *A* ad *b*, quaſi æqualis.

Dico *b* ad *c* eandem eſſe rationem, quàm quaſi ha-[b]et *A* ad *c*.

Præpar.

Aſſumatur *d*, æqualis ipſi *c*.

Demonſt.

hypoth.	*A*; *b*: quaſi æqualis.
conſtr.	*c*; *d*: æqualis.
def.4.b.	*A*; *b*: quaſi *c*; *d*.
22. b.	*A*; *c*: quaſi *b*; *d*.
8. 5.	*b*; *d*: *b*; *c*.
19. b.	*A*; *c*: quaſi *b*; *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. Prop. 34.

TOta ad vnitatem, quaſi eſt infinita.

Demonſtr.

Nam tota, cum non dicatur, cuius numeri tota ſit; eſt indeterminata: ideoque totæ ad vnitatem, ratio eſt indeterminata. Cumque poſſit dici, cuius numeri tota ſit; eſt determinabilis: ideoque totæ ad vnitatem, ratio eſt determinabilis. Cum denique poſſit dici eius numeri tota, qui maior ſit, quàm vt ad vnitatem, habeat quamlibet ratio-

nem

Digitized by Google

nem datam ; qui numerus, ipſa ſui ipſius eſt tota:
erit ratio totæ ad vnitatem, maior, quàm data
def. p. h. quælibet. Ergo tota ad vnitatem, quaſi eſt infinita.

Theor. 35. Prop. 35.

SEſquitota ad vnitatem, quaſi eſt infinita. Item ſemitota.

Demonſtr.

34. h. Tota ad vnitatem, quaſi eſt infinita: ergo com-
8. h. ponendo, ſeſquitota ad vnitatem, quaſi eſt infi-
8. h. nita. Item diuidendo, ſemitota ad vnitatem, quaſi eſt infinita.

Theor. 36. Prop. 36.

TOta, ſeſquitota, & ſemitota, quaſi ſunt æquales inter ſe.

Demonſtr.

35. h. Seſquitota ad vnitatem, quaſi eſt infinita: ergo
9. h. per conuerſionem rationis, ſeſquitota ad totam,
34. h. quaſi eſt æqualis. Rurſum tota ad vnitatem quaſi
9. h. ſit infinita: ergo per conuerſionem rationis, tota
18. h. ad ſemitotam, quaſi eſt æqualis. Ergo ſeſquitota ad ſemitotam, quaſi eſt æqualis.

Theor. 37. Prop. 37.

TOta quantumlibet ordinata ad vnitatem, quaſi eſt infinita: Item ſeſquitota, & ſemitota.

Dico

Dico $t3 ; u$: quaſi infinitum.

Demonſtr.

34. *h.*	$t ; u$: quaſi infinita.
def.6.p.	$t3 ; u$: triplicata $t ; u$.
12. *h.*	$t3 ; u$: quaſi infinita. Quod &c.
*ex*35.*h.*	Similiter oſtendetur $q3 ; u$: quaſi infinita.
	Item $m3 ; u$: quaſi infinita.

Quare &c.

Theor. 38. *Prop.* 38.

TOtarum inæqualiter ordinatarum, magis ordinata, ad minùs ordinatam, quaſi eſt infinita. Item ſeſquitotarum, & ſemitotarum.

Hypoth.

$t5$ magis eſt ordinata, quàm $t3$.

Dico $t5 ; t3$: quaſi infinitam.

Demonſtr.

34. *h.*	$t ; u$: quaſi infinita.
def.6.p.	$t5 ; t4 : t ; u$.
def.6.p.	$t4 ; t3 : t ; u$.
13. 5.	$t5 ; t4$: quaſi infinita.
13. 5.	$t4 ; t3$: quaſi infinita.
12. *h.*	$t5 ; t3$: quaſi infinita. Quod &c.

Similiter oſtendetur $q5 ; q3$: quaſi infinita.

Et $m5 ; m3$: quaſi infinita.

Quare &c.

Theor.

Theor. 39. *Prop.* 39.

ÆQucordinatæ, tota, ſemitota, & ſeſquitota, ſunt quaſi æquales.

Dico $t3$, $q3$, $m3$, quaſi æquales eſſe.

Demonſtr.

36. *h.*	t; q: quaſi æqualis.
3. *p.*	$t3$; $q3$: triplicata t; q.
21. *h.*	$t3$; $q3$: quaſi ęqualis. Quod &c.
ſup.	$q3$; $m3$: quaſi æqualis. Quod &c.
18. *h.*	$t3$; $m3$: quaſi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 40. *Prop.* 40.

TOta magis ordinata, ad aggregatum ex totis minùs ordinatis, quaſi eſt infinita. Item ſemitota, ad aggregatum ex ſemitotis: & ſeſquitota, ad aggregatum ex ſeſquitotis.

Hypoth.

Eſto tota magis ordinata $t3$: qua minùs ordinatæ. $t2$, t, & rationalis u: quarum aggregatum $5t2 + 3t + 4u$.

Dico $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quaſi eſſe infinitam.

Demonſtr.

38. *h.*	$t3$; $t2$: quaſi infinita.
32. *h.*	$t3$; $5t2$: quaſi infinita.
38. *h.*	$t3$; t: quaſi infinita.
32. *h.*	$t3$; $3t$: quaſi infinita.

$t3$;

37. b. | $t3$; u : quaſi infinita.
32. b. | $t3$; $4u$: quaſi infinita.
32. b. | $t3$; $5t2 + 3t + 4u$: quaſi infinita. Quod &c.

Similiter oſtendetur, $m3$; $5m2 + 3m + 4u$: quaſi infinita. Quod &c.

Item, $q3$; $5q2 + 3q + 4u$: quaſi infinita. Quod &c. Quare &c.

Theor. 41. *Prop.* 41.

TOta magis ordinata, ſibi ipſi, & alijs minùs ordinatis, additis, vel ſubtractis, quaſi eſt æqualis. Item ſemitota: & ſeſquitota.

Hypoth.

Tota vel ſemitota, vel ſeſquitota magis ordinata eſto A: quacum additæ minùs ordinatæ, ſunto B: & ſubtractæ C.

Dico A, $A+B$, $A-C$, $A+B-C$, quaſi æquales eſſe.

Demonſtr.

40. b. | A; B : quaſi infinita.
8. b. | $A+B$; B : quaſi infinita.
9. b. | $A+B$; A : quaſi æqualis: Quod &c.
40. b. | A; C : quaſi infinita.
9. b. | A; $A-C$: quaſi æqualis. Quod &c.
32. b. | A; $B-C$: quaſi infinita.
8. b. | $A+B-C$; $B-C$: quaſi infinita.
9. b. | $A+B-C$; A : quaſi æqualis. Quod &c.

18. b. $A + B - C$, $A + B$, $A - C$, quaſi ſunt æquales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 42. *Prop.* 42.

QVælibet quadratrix quaſi eſt æqualis ad totam vnitate plus ordinatam, quàm ſit eius baſis. item ad ſemitotam: & ad ſeſquitotam.

Hypoth.

Eſto quadratrix *A*: & eſto tota *B*, vnitate plus ordinata, quàm baſis quadratricis *A*.

Dico *A* ad *B*, quaſi æqualem eſſe.

Demonſtr.

22. 2. *A*, eſt æqualis ipſi *B*, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, non plus ordinatis, quàm
hypoth. baſis *A*. Sed *B*, eſt tota vnitate plus ordinata, quàm baſis *A*; ideòque totæ, non plus ordinatę, quàm baſis *A*, ſunt minùs ordinatæ, quàm *B*. Ergo *A*; eſt æqualis ipſi *B*, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm
41. b. *B*. Sed & *B*, demptis, additiſque aliqualiter acceptis totis, minùs ordinatis, quàm *B*, quaſi eſt
18. b. æqualis ipſi *B*. Ergo *A*, quaſi eſt æqualis ipſi *B*. Quod &c.

31. 2. Idem, & eodem modo demonſtraretur, ſi *B*
32. 2. eſſet ſemitota: necnõ ſi *B* eſſet ſeſquitota. Quę &c.

Quare &c.

Theor. 43. Prop. 43.

QVælibet quadratrix, ad totas non plus ordinatas, quàm ſit eius baſis, quomodolibet acceptas, quaſi eſt infinita. item ad ſemitotas: necnon ad ſeſquitotas.

Hypoth.

Eſto quadratrix *A*: & in *B* ſint ſumptæ totæ quomodolibet, vel ſemitotæ, vel ſeſquitotæ.

Dico *A* ad *B* quaſi infinitam eſſe.

Præpar.

Sumatur *C*, tota, vnitate plus ordinata, quàm baſis quadratricis *A*: vel ſemitota, vel ſeſquitota.

Demonſtr.

41. *b.*	*C*; *B*: quaſi infinita.
42. *b.*	*A*; *C*: quaſi æqualis.
31. *b.*	*A*; *D*: quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 44. Prop. 44.

RAtionis quaſi infinitæ diuiſo antecedente per datum numerum, ratio eſt quaſi infinita.

Hypoth.

A ad *B*, quaſi eſt infinita.

Dico ſubtriplam *A* ad *B*, quaſi infinitam eſſe.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonſtr.

hypoth.	*A*; *B*: quaſi infinita.
def.p.h.	*A*; *B*: poteſt maior eſſe, quàm 3*c*; *d*.
p. h.	*A*; 3*c*: poteſt maior eſſe, quàm *B*; *d*.
15. 5.	*A*; 3*c*: ſubtripla *A*; *c*.
13. 5.	Subtripla *A*; *c*: poteſt maior eſſe, quàm *B*; *d*.
p. h.	Subtripla *A*; *B*: poteſt maior eſſe, quàm *c*; *d*.
def.p.h.	Subtripla *A*; *B*: quaſi eſt infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 45. *Prop.* 45.

RAtionis quaſi infinitæ multiplicato conſequente, ratio eſt quaſi infinita.

Hypoth.

A ad *B*, quaſi eſt infinita.

Dico *A* ad duplam *B*, quaſi eſſe infinitam.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio *c* ad *d*.

Demonſtr.

hypoth.	*A*; *B*: quaſi infinita.
def.p.h.	*A*; *B*: poteſt maior eſſe, quàm 2*c*; *d*.
p. h.	*A*; 2*c*: poteſt maior eſſe, quàm *B*; *d*.
15. 5.	*B*; *d*: 2*B*; 2*d*.
13. 5.	*A*; 2*c*: poteſt maior eſſe, quàm 2*B*; 2*d*.
p. h.	*A*; 2*B*: poteſt maior eſſe, quàm 2*c*; 2*d*:
15. 5.	2*c*; 2*d*: *c*; *d*.
13. 5.	*A*; 2*B*: poteſt maior eſſe, quàm *c*; *d*.

A; 2*B*:

def.p.h. | A; 2B: quaſi eſt infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theorema 46. Prop. 46.

RAtio compoſita ex duabus rationibus, altera, quaſi quadam propoſita, altera, quaſi infinita; quaſi eſt infinita.

Hypoth.

A; *B*: quaſi quædam propoſita.

B; *C*: quaſi infinita.

Dico *A*; *C*: quaſi eſſe infinitam.

Præpar.

Aſſumatur quælibet ratio, *d* ad *e*: item aſſumatur quælibet *d* ad *f*, minor, quàm, cui quaſi eadem eſſe dicitur *A* ad *B*.

Demonſtr.

hypoth.	*B*; *C*: quaſi eſt infinita.
def.p.h.	*B*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *f*; *e*.
def.3.h.	*A*; *B*: poteſt maior eſſe, quàm *d*; *f*.
4. h.	*A*; *C*: poteſt maior eſſe, quàm *d*; *e*.
def.p.h.	*A*; *C*: quaſi eſt infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 47. Prop. 47.

QVadratrices in eadem baſi iacentes, inter ſe ſunt quaſi æquales.

Hy-

Hypoth.

Sint in eadem baſi quadratrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.
Dico $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, quaſi æquales eſſe.

Præpar.

Sumatur C, tota, vnitate plus ordinata, quàm ſit baſis ipſarum $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

Demonſtr.

43. h.	$\mathcal{A}$; C: quaſi æqualis.
43. h.	$\mathcal{B}$; C: quaſi æqualis.
18. h.	$\mathcal{A}$; C: quaſi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 48. *Propoſ.* 48.

SVb quadratrices in eadem baſi iacentes, ſunt quaſi æquales.

Hypoth.

Sint in eadem baſi ſubquadratrices $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.
Dico $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, quaſi æquales eſſe.

Præpar.

Sumantur homonymæ quadratrices C, D.

Demonſtr.

def. 13. 2	C ad $\mathcal{A}$, æquemultiplex eſt, vt D ad $\mathcal{B}$.
15. 5.	C; $\mathcal{A}$: D; $\mathcal{B}$.
16. 5.	C; D: $\mathcal{A}$; $\mathcal{B}$.
47. h.	C; D: quaſi ęqualis.
19. h.	$\mathcal{A}$; $\mathcal{B}$: quaſi æqualis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 49. Prop. 49.

IN diuerſis baſibus, quadratrix in magis ordinata, ad quadratricem in minùs ordinata, quaſi eſt infinita.

Hypoth.

Sint quadratrices *A*, *B*, in diuerſis baſibus: *A*, in magis ordinata baſi, quàm *B*.

Dico *A* ad *B*, quaſi eſſe infinitam.

Præpar.

Aſſumatur tota *C*, vnitate plus ordinata, quàm ſit baſis quadratricis *A*: & tota *D*, vnitate plus ordinata, quàm ſit baſis quadratricis *B*.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam *A* eſt in baſi magis ordinata, quàm
38. *h.* *B*: ergo etiam *C* eſt magis ordinata tota, quàm
42. *h.* *D*: ergo *C* ad *D*, quaſi eſt infinita. Sed *C*, *A*,
31. *h.* ſunt quaſi æquales: & *D*, *B*, quaſi æquales. Ergo *A* ad *B*, quaſi eſt infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 50. Prop. 50.

IN diuerſis baſibus, quelibet maſſa in magis ordinata, ad quamlibet maſſam, in minùs ordinata, quaſi eſt infinita.

Hypoth.

Sint maſſæ *A*, *B*, in diuerſis baſibus: *A* in magis ordinata baſi, quàm *B*.

Dico *A* ad *B*, quaſi eſſe infinitam.

Præ-

Præpar.

*A*ſſumantur quadratrices *C*, *D*: *C* quidem homonyma ipſi *A*; & *D*, ipſi *B*.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam *A*, eſt in baſi magis ordinata, quàm
B: etiam *C*, eſt in baſi magis ordinata, quàm
49. h. *D*: & *C* ad *D*, quaſi eſt infinita. Eſt autem ratio
tio *A* ad *C*, quædam propoſita, quàm habent
propoſiti numeri multiplicantes homonymam
46. h. ſpeciem: ergo ex æquali, *A* ad *D*, ratio eſt quaſi
infinita. Item *D* ad *B*, ratio eſt quædam pro-
poſita, quàm habent propoſiti numeri multipli-
46. h. cantes hononymam ſpeciem: ergo ex æquali, *A*
ad *B*, ratio eſt quaſi infinita. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 51. *Prop.* 51.

SPecies in eadem baſi iacentes, ſunt reciprocè quaſi proportionales, vt numeri, in tabula multiplicium, ſimiliter iacentes.

Hypoht.

Sint in eadem baſi ſpecies *A*, *B*: & ſint numeri ſimiliter iacentes, in tabula multiplicium; *c* ſimiliter, atque *A*; & *d*, ſimiliter, atque *B*.

Dico *A*; *B*: quaſi *d*; *c*.

Præpar.

Sumantur ſubquadratrices *E*, *F*: *E* quidem homonyma ipſi *A*; & *F*, ipſi *B*.

De-

Demonſtr.

deff. 11. *p.* & 2.	*A*; *E*: *u*; *c*.
48. *b.*	*E*; *F*: quaſi æqualis.
deff. 11. *p.* & 2.	*F*; *B*: *d*; *u*.
21. *b.*	*A*; *B*: quaſi *d*; *c*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 52. *Prop.* 52.

MAſſæ in eadem baſi iacentes, quaſi eamdem habent rationem compoſitam, ex directa ſuorum numerorum, & recipioca numerorum in tabula multiplicium ſimiliter iacentium.

Hypoth.

Sint in eadem baſi, maſſæ *A*, *B*: quarum numeri *c*, *d*: *c* quidem, qui multiplicans homonymam ſpeciem *A*, facit maſſam *A*; & *d*, qui multiplicans homonymam ſpeciem *B*, facit maſſam *B*. Et ſint numeri *e*, *f*, ſimiliter iacentes in tabula multiplicium; *e* quidem, ſicut *A*; & *f*, ſicut *B*.

Dico *A*; *B*: quaſi *c*; *d*, + *f*; *e*.

Præpar.

Sumantur ſpecies homonymæ *G*, *H*: *G* quidem ipſi *A*; & *H*, ipſi *B*.

Demonſtr.

hypoth.	*A*; *G*: *c*; *u*.
51. *b.*	*G*; *H*: quaſi *f*; *e*.
hypoth.	*H*; *B*: *u*; *d*.
21. *b.*	*A*; *B*: quaſi *c*; *d*, + *f*; *e*. Quod &c. Quare &c.

Proplema primum Prop. 53.

DAta ratione; datoque numero pariter pari: ſubtotuplicatam rationem inuenire, quotus eſt datus numerus.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: datuſque numerus *c*, pariter par.

Oportet rationem inuenire, ſubtotuplicatam rationis, *a* ad *b*, quotus eſt *c*.

Conſtr.

Subdiuidatur numerus *c*, vſque ad vnitatem: & ſit *c* ad *d*, duplus: & *d* ad *f*, duplus: & *f* ad vnitatem, duplus. Deinde ſumatur, inter *a*, *b*, media proportionalis *g*: & inter *a*, *g*, media proportionalis *h*: & inter *a*, *h*, media proportionalis *i*: vt fiant ſumptiones totidem, quot ſunt, numeri *c* diuiſiones bifariam, vſque ad vnitatem.

Dico *a*; *i*: ſubtotuplicatam *a*; *b*, quotus eſt *c*.

Demonſtr.

conſtr. | *a*; *b*: duplicata *a*; *g*, ſicut *c*; *d*: duplus.
conſtr. | *a*; *g*: duplicata *a*; *h*, ſicut *d*; *f*: duplus.
conſtr. | *a*; *h*: duplicata *a*; *i*, ſicut *f*; *u*: duplus.
p. p. | *a*; *b*: multiplicata *a*: *i*, ſicut *c*; *u*: multiplus.
| *a*; *i*: ſubtotuplicata *a*; *b*, quotus eſt *c*. Quod erat faciendum.

Quare data ratione, datoque numero pariter pari, ſubtotuplicatam rationem inuenimus, quotus eſt datus numerus.

Probl. 2. Prop. 54.

DAta ratione inæqualitatis; & propoſito numero ordinis poteſtatum: numerum inuenire; pro quo ſeſquitota, & ſemitota æqueordinatæ, ſunt ad inuicem propiores æqualitati.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a*, ad *b*: & ſit *a*, maior, quàm *b*: ſitque datus numerus quinarius.

Oportet numerum inuenire; quo quo ſeſquitota quinta, ad ſemitotam quintam, minor eſt, quàm vt *a* ad *b*: & ſemitota quinta, ad ſeſquitotam quintam, maior, quàm vt *b* ad *a*.

Conſtr.

Sumatur numerus pariter par, nō minor, quàm
53. *b.* datus quinarius: & ſit ſumptus octonarius: & ſuboctuplicata ratio inueniatur, rationis *a* ad *b*; quę ſit *a* ad *c*: & ſumatur numerus *d*, maior ad binarium, quàm vt *a* ad *a*+*c*: qui, dempto binario, relinquatur *e*: & inter *d*, *e*, ſumatur nume-
deff. 18. rus *f*: pro quo, vt radice tota; ſemitota eſt *e*; ſeſ-
& 19. 2 quitota *d*.

Dico *d*5; *e*5: minorem eſſe, quàm *a*; *b*.

Et *e*5; *d*5: maiorem, quàm *b*; *a*.

Demonſtr.

conſtr. *d*; 2: maior, quàm *a*; *a*+*c*.

3. *b.* *a*; *e*: minor, quàm *a*; *c*.

4. *b.* *d*5; *e*5: minor, quàm *a*5; *c*5.

5. *h.*	$a5;\ c5$: minor, quàm $a8;\ c8$.
conſtr.	$a8;\ c8$: $a;\ b$.
13. 5.	$d5;\ e5$: minor, quàm $a;\ b$. Quod &c.
2. *h.*	$e5;\ d5$: maior, quàm $b;\ a$. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 3. *Prop.* 55.

DAta ratione; & propoſitis ordinibus poteſtatum inæqualibus: numerum inuenire, pro quo, plus ordinata poteſtas, ad minùs ordinatam, maior eſt, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio, a ad b: ſint propoſiti ordines poteſtatum inæquales, quinarius, & binarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, poteſtas quinta ad ſecundam, maior eſt, quàm vt a ad b.

Conſtr.

Sumatur numerus c, in ſerie tertiarum poteſtatum ab omnibus numeris, maior ad vnitatem, quàm vt a ad b: numeri autem c, ſit radix d.

Dico, pro d radice, $d5;\ d2$: maiorem eſſe, quàm $a;\ b$.

Demonſtr.

conſtr.	c: $d3$.
8. 5. & *def.6.p.*	$c;\ u$: $d3;\ u$: $d5;\ d2$.
conſtr.	$c;\ u$: maior, quàm $a;\ b$.
13. 5.	$d5;\ d2$: maior, quàm $a;\ b$. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 4. Prop. 56.

DAta ratione; propoſitiſque ordinibus poteſtatum inæqualibus: numerum inuenire, pro quo, ſemitota plus ordinata, ad ſeſquitotam minùs ordinatam, maior eſt, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio a ad b: ſintque propoſiti ordines poteſtatum, quinarius, atque ternarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, ſemitota quinta ad ſeſquitotam tertiam, maior eſt, quàm vt a ad b.

Conſtr.

Inueniatur *per* 55.*h.* numerus c, pro quo, ſemitota d: & ſemitota quinta $d5$, ad ſemitotam tertiam $d3$, maior eſt, quàm vt $a+b$ ad b. Inueniatur deinde *per* 54.*h.* numerus e, non minor, quàm c; pro quo, ſemitota m, & ſeſquitota q; & $m3$ ad $q3$, maior eſt, quàm vt a ad $a+b$.

Dico, pro numero e radice, $m5$; $q3$: maiorem eſſe, quàm a; b. *Demonſtr.*

conſtr.	e: non minor, quàm c.
*def.*18.2	m: non minor, quàm d.
5. *h.*	$m5$; $d5$: non minor, quàm $m3$; $d3$.
p. h.	$m5$; $m3$: non minor, quàm $d5$; $d3$.
conſtr.	$d5$; $d3$: maior, quàm $a+b$; b.
13. 5.	$m5$; $m3$: maior, quàm $a+b$; b.
conſtr.	$m3$; $q3$: maior, quàm a, $a+b$.
4. *h.*	$m5$; $q3$: maior, quàm a; b. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 5. Prop. 57.

DAtis duabus rationibus; & propoſitis duobus inæqualibus ordinibus poteſtatum: numerum inuenire, pro quo, ratio compoſita ex vna data ratione, & ex ratione ſemitotæ plus ordinatæ, ad ſeſquitotam minùs ordinatam, maior eſt, quàm altera data ratio.

Hypoth.

Sint datæ rationes, *a* ad *b*, & *c* ad *d*: & ſint propoſiti ordines inæquales, quinarius, & binarius.

Oportet numerum inuenire, pro quo, ratio compoſita ex *a* ad *b*, & ex ſemitotæ quintæ ad ſeſquitotam ſecundam, maior eſt, quàm *c* ad *d*.

Conſtr.

56. h. | Fiat vt *b* ad *a*, ita *d* ad *e*: & inueniatur *f* numerus, pro quo, ſemitota *g*, ſeſquitota *h*; & *g5* ad *h3*, maior, quàm *c* ad *e*.

Dico, pro *f* radice, *a*; *b*, + *g5*; *h3*: maiorem eſſe, quàm *c*; *d*.

Demonſtr.

conſtr. | *g5*; *h3*: maior, quàm *c*; *e*.
conſtr. | *a*; *b*: *e*; *d*.
4. h. | *a*; *b*, + *g5*; *h3*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 6. Prop. 58.

DAta ratione inæqualitatis; & propoſitis duabus in eadem baſi iacentibus quadratricibus: numerum in-

inuenire, pro quo quadratrices propoſitæ, ſunt propiores æqualitati, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*: & ſit *a* maior, quàm *b*: ſintque propoſitæ in quinta baſi, duæ quadratrices *c*, *d*.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c*, & *d*, ſunt ad inuicem, minores, quàm vt *a* ad *b*; maiores, quàm vt *b* ad *a*.

Conſtr.

54. *b.* | Inueniatur numerus *e*, pro quo, ſemitota *f*, ſeſquitota *g*; & *f6* ad *g6*, maior eſt, quàm vt *b* ad *a*; & *g6* ad *f6*, minor, quàm vt *a* ad *b*.

Dico, pro *e* radice, quadratrices *c*, *d*, eſſe ad inuicem minores, quàm vt *a* ad *b*; maiores, quàm vt *b* ad *a*.

Demonſtr.

30. 2. | *c*, eſt maior, quàm *f6*. minor, quàm *g6*.

30. 2. | *d*, eſt maior, quàm *f6*. minor, quàm *g6*.

8. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *f6*. *g6*. minor, quàm *g6*; *f6*.

2. *b.* | *d*; *c*: minor, quàm *g6*. *f6*. maior, quàm *f6*; *g6*.

conſtr. | *f6*; *g6*: maior, quàm *b*; *a*.

conſtr. | *g6*; *f6*: minor, quàm *a*; *b*.

13. 5. | *c*; *d*: maior, quàm *b*; *a*. minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.

13. 5. | *d*; *c*: minor, quàm *a*; *b*. maior, quàm *b*; *a*. Quod &c.

Quare &c.

Pro-

Probl. 7. Prop. 59.

DAta ratione; & propoſitis duabus non in eadem baſi iacentibus quadratricibus: numerum inuenire, pro quo, quadratrix, quæ iacet in plus ordinata baſi, ad alteram, maior eſt, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & propoſitæ ſint quadratrices duæ *c*, *d*; *c*, in quinta baſi; *d*, in ſecunda.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c* ad *d*, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*.

Conſtr.

56. *h.* | Inueniatur numerus *e*, pro quo, ſemitota *f*, ſeſquitota *g*: & *f6* ad *g3*, maior ſit, quàm vt *a* ad *b*.

Dico, pro *e* radice, *c*; *d*: maiorem eſſe, quàm *a*; *b*.

Demonſtr.

30. 2. | *c*, maior eſt, quàm *f6*.
30. 2. | *d*, minor eſt, quàm *g3*.
8. 5. | *c*; *d*: maior eſt, quàm *f6*; *g3*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 8. Prop. 60.

DAta ratione; & propoſitis duabus non in eadem baſi iacentibus maſſis: numerum inuenire, pro quo, maſſa, quæ iacet in plus ordinata baſi, ad alteram, maior eſt, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b:* ſintque duæ maſſæ *c, d c*; quidem, in quinta baſi; *d*, in tertia.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *c* ad *d*, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*.

Conſtr.

Fiat, vt maſſa *c* ad ſibi ſynonymam quadratricem *e*, ſic *a* ad *f:* & vt ſynonyma ipſi *d* qua-
59. *b.* dratrix *g*, ad ipſam *d*, ſic fiat *h* ad *b:* & inueniatur numerus *i*, pro quo, quadratrix *e*, ad quadratricem *g*, maior eſt, quàm vt *f* ad *h*.

Dico pro *i* radice, maſſam *c* ad maſſam *d*, maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*.

Demonſtr.

conſtr. | *c*; *e*: *a*; *f*.
conſtr. | *e*; *g*: maior, quàm *f*; *h*.
conſtr. | *g*; *d*: *h*; *b*.
4. *h.* | *c*; *d*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 9. Prop. 61.

PRopoſitis in eadem baſi iacentibus duabus maſſis; & datis duabus rationibus, non ijſdem, quàm quaſi habent ad inuicem maſſæ, ſed maiore vna, minore altera: numerum inuenire, pro quo, maſſæ propoſitæ rationem habent minorem, quàm data maior, & maiorem, quàm data minor.

Hypoth.

Sint maſſę *a*, *d*: & ſit ratio *i* ad *s*, quàm quaſi habet *a* ad *d*: & ſit *e* ad *h*, maior, quàm *i* ad *s*; & *n* ad *r*, minor.

Oportet numerum inuenire, pro quo, *a* ad *d*, eſt minor, quàm *e* ad *h*; & maior, quàm *n* ad *r*.

Conſtrr.

Sumatur ipſi *a*, ſynonyma quadratrix *b*; & ipſi *d* ſynonyma *c*. Fiat deinde.

a; *b*: *e*; *f*: *i*; *k*: *n*; *o*.
c; *d*: *g*; *h*: *l*; *s*: *p*; *r*.

Demonſtr.

hypoth.	*a*; *d*: quaſi *i*; *s*.
def.17.5	*a*; *b*,+*b*; *c*,+*c*; *d*: quaſi *i*; *k*,+*k*; *l*+*l*; *s*.
conſtr.	*a*; *b*: *i*; *k*.
conſtr.	*c*; *d*: *l*; *s*.
	b; *c*: quaſi *k*; *l*.
27. *h.*	*b*; *c*: quaſi æqualitas.
	k; *l*: æqualitas.
hypoth.	*e*; *h*: maior, quàm *i*; *s*.
def.17.5	*e*; *f*,+*f*; *g*,+*g*; *h*: maior, quàm *i*; *k*,+*k*; *l*,+*l*; *s*.
conſtr.	*e*; *f*: *i*; k.
conſtr.	*g*; *h*: *l*; *s*.
	f; *g*: maior, quàm k; *l*.
	f: maior, quàm *g*.
hypoth.	*n*; *r*: minor, quàm *i*; *s*.
def.17.5	*n*; *o*,+*o*; *p*,+*p*; *r*: minor, quàm *i*; k,+k; *l*,+*l*; *s*.
conſtr.	*n*; *o*: *i*; k.

p; *r*:

conſtr.	*p*; *r*: *l*; *s*.
	o; *p*: minor, quàm k; *l*.
	o: minor, quàm *p*.

Conſtr.

	Aſſumatur alterutra *f* ad *g*, vel *p* ad *o*, mi-
58. *h*.	nor: & ſit aſſumpta *f* ad *g*. Et inueniatur nume-
	rus *t*, pro quo, quadratrix *b* ad quadratricem *c*,
	ſit minor, quàm *f* ad *g*; maior, quàm *g* ad *f*.

Dico, pro *t*, maſſam *a*, ad maſſam *d*, minorem eſſe, quàm *e* ad *h*; & maiorem, quàm *n* ad *r*.

Demonſtr.

conſtr.	*a*; *b*: *e*; *f*.
conſtr.	*b*; *c*: minor, quàm *f*; *g*.
conſtr.	*c*; *d*: *g*; *h*.
4. *h*.	*a*; *d*: minor, quàm *e*; *h*. Quod &c.
aſſumpt.	*f*; *g*: minor, quàm *p*; *o*.
2. *h*.	*g*; *f*: maior, quàm *o*; *p*.
conſtr.	*b*; *c*: maior, quàm *g*; *f*.
13. 5.	*b*; *c*: maior, quàm *o*; *p*.
conſtr.	*a*; *b*: *n*; *o*.
conſtr.	*c*; *d*: *p*; *r*.
4. *h*.	*a*; *d*: maior, quàm *n*; *r*. Quod &c.

Quare &c.

Petrus Mengolus, D. Iacobo Teſino Philoſophiæ Doctori S. D.

Ibi primùm ex mea ſchola, Vir Excellentiſs. atque alteri è ſchola Excellentiſsimi Caſsini, amico noſtro Io. Galeatio ManZio, contigit hoc elementum communicari: quod non, ſine tuo, atque illius nomine, publicari oportebat; quoniam ipſi mihi tùm placere cæpit, cum vtramque veſtrûm obtinuit approbationem. Poſtulabam honeſti furis laudem. quòd, cum huiuſmodi contemplationis aliena ſit materia, eorum videlicet, quibus logarithmos debemus; cumque aliena ſit etiam forma, & contemplationis modus, ipſiſsimus Euclidis in quinto: meum fecerim ex vtraque compoſitum. & quemadmodum, præcedentium elementorum in vtraque ſubiecti, & modi nouitate gloriabar: ita præſentis in vetuſtate, nouam laudem quærebam. Ille, viſis definitionibus, & audita primarum octo propoſitionum, ex Euclide, traductione fideli; ſtatim om-

nibus

nibus titulis propoſitionum, à me curſim lectis, & ſine demonſtratione facilem, pro ſui acumine ingenij, praſtabat aſſenſum: & ſuggeſsit, potuiſſe totam hanc lucubrationem, vnica propoſitione comprehendi. Quæ demonſtrat Euclides in quinto elementorum, de magnitudinibus maioribus, minoribus, æqualibus, æquemultiplicibus, & eamdem, vel maiorem rationem habentibus: poſſe demonſtrari de rationibus altioribus, depreſſioribus, ęquealtis, ęquemultiplicatis, & eamdem, vel maiorem logarithmicam rationem habentibus. *Cogitabam ſi poſſem huiuſmodi vti conſilio: tibique interim rure ſuperuenienti cæpi communicare. Itaque ſingulis propoſitionibus & demonſtrationibus, toto animo intendebas, & cum quinto Euclidis diligenter conferebas, cumq; duo inciderimus, in traducendo, difficiliora (vnum,* minoris inæqualitatis rationes, quæ, quò minores ſunt, eò altiores dicuntur, pro maioribus magnitudinibus vſuuenire. *alterum*, rationem ex ratione ſubtrahi, vel decomponi, per ſuæ compoſitionem conuerſæ:) *intellexi non eſſe operis diſpendium, mutatis mutandis, ex Euclide integram traductionem perficere, & exhibere. Tuque ipſe iuſtum furtum, & honeſtiſsimum probaſti: quòd non ab*

om-

omnibus facilè probarentur peculiares propoſitiones, quæ ſub illa vnica continentur. & certè à me non poſſent commodè allegari, ad alia in ſequentibus elementis demonſtranda. Quos ergo ſemel approbaſti labores meos, vt amicis & communices, & commendes, enixè rogo: nam non mihi ſoli, non paucis, ſed omnibus laboro.

Vale.

Digitized by Google

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM QVARTVM.

DEFINITIONES.

1. DVarum rationum inæqualitatis, vtrarumque maioris, vel vtrarumque minoris, Altior, dicetur, ab æqualitate remotior.

2. Et Depreſſior, æqualitati propior.

3. Submultiplicata eſt ratio rationis, depreſſior, altioris, cum depreſſior, aliquoties compoſita, facit altiorem.

4. Multiplicata verò altior, depreſſioris; cum depreſſior, aliquoties compoſita, facit altiorem.

5. Ratio logarithmica dicetur, duarum rationum inęqualitatis, vtrarumque maioris, vel vtrarumque minoris, mutua quædam; ſecundùm altitudinem, vel depreſſionem habitudo.

6. Proportio logarithmica, dicetur, ſimilitudo logarithmarum rationum, vel ad inuicem, vel ad alias rationes.

7. Rationem logarithmicam habere inter ſe rationes

dicen-

dicentur, quæ multiplicatæ, poſſunt ſe mutuò, altitudine ſuperare.

8. In eadem ratione logarithmicè, dicuntur eſſe rationes duæ, prima, ad ſecundam, atque duæ quantitates, prima, ad ſecundam: cum primæ rationis, quælibet multiplicata ratio, & primæ quantitatis æquemultiplex, à ſecundę rationis qualibet multiplicata, & à ſecundæ quantitatis ęquemultiplici, vel vnà deficiunt, vel vnà æquales ſunt, vel vnà excedunt; ratio quidem, altitudine, & quantitas ipſâ quantitate.

9. Et dicetur prima ratio ad ſecundam, proportionalis logarithmicè, ſicut prima quantitas ad ſecundam.

10. Cum verò primę rationis multiplicata ratio, altior fuerit, quàm multiplicata ſecundæ; multiplex autem primę quantitatis, non maior fuerit, quàm multiplex ſecundæ: dicetur logarithmica ratio rationum, maior, quàm ratio quantitatum.

11. Cumque è contra, multiplex primæ quantitatis, maior fuerit multiplici ſecundæ; multiplicata autem ratio primæ rationis, non altior, quàm multiplicata, ſecundæ: dicetur ratio quantitatum, maior, quàm logarithmica ratio rationum.

12. Rurſum in eadem ratione logarithmicè, dicentur eſſe rationes quatuor prima ad ſecundam, atque tertia ad quartã: cum primæ, ac tertiæ, rationes æquemultiplicatæ, à ſecundæ, & quartæ, rationibus æquemultiplicatis, qualiſcunque ſit hæc multiplicatio, vtraque, ab vtraque,

vel

vel vnà altiores ſunt, vel vnà æquealtæ, vel vnà depreſſiores, ſi eę ſumantur, quæ inter ſe reſpondent.

13. Eamdem autem habentes rationem logarithmicam, rationes, logarithmicè proportionales vocentur.

14. Cum verò æquemultiplicatarum, multiplicata primæ rationis altior fuerit, quàm multiplicata ſecundæ; multiplicata autem tertiæ, non altior fuerit, quàm multiplicata quartæ: tunc prima ratio ad ſecundam, maiorem rationem logarithmicam habere dicetur, quàm tertia ad quartam.

15. Homologæ rationes rationibus, aut quantitatibus dicuntur, antecedentes quidem antecedentibus, & conſequentes conſequentibus.

16. Homologia logarithmica eſt ſumptio homologarum rationum, aut & quantitatum, vt in alia quadam logarithmica proportionalitate, fiant homologæ.

17. Alterna ratio logarithmica, eſt rationum ſumptio antecedentis comparatæ ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

18. Inuerſa ratio logaritmica, eſt rationum ſumptio conſequentis, ceu antecedentis, comparatæ ad antecedentem, velut ad conſequentem.

19. Compoſitio rationis logarithmicæ, eſt ſumptio compoſitæ ex rationibus antecedenti, & conſequenti, ceu vnius ad ipſam conſequentem.

20. Diuiſio rationis logarithmicæ, eſt ſumptio rationis, quacum compoſita conſequens facit antecedentem,

ad ipſam conſequentem.

21. Conuerſio rationis logarithmicæ, eſt ſumptio antecedentis, ad eam, quacum compoſita conſequens facit ipſam antecedentem.

22. Ex æqualitate ratio logarithmica eſt, ſi plures duabus ſint rationes, & his, vel quantitates, vel aliæ rationes, multitudine pares, quæ binæ ſumatur, & in eadem ratione logarithmica: cum vt in primis rationibus, prima logarithmicè ſe habet ad vltimam, ſic in ſecundis vel rationibus, vel quantitatibus, prima ad vltima n ſeſe habuerit. Vel aliter ſumptio extremarum, per ſubductionem mediarum.

23. Ordinata proportio logarithmica eſt, tribus poſitis rationibus, & alijs, vel quantitatibus, vel rationibus, quę ſint his multitudine pares: cum, vt in primis rationibus, logarithmicè ſe habet antecedens, ad conſequentem; ita in ſecundis, vel quantitatibus, vel rationibus, antecedens ad conſequentem: & vt in primis, conſequens, ad aliam quampiam; ſic in ſecundis, conſequens, ad aliã quampiam.

24. Perturbata autem logarithmica proportio eſt: cum vt in primis, logarithmicè ſe habet antecedens, ad conſequentem; ita in ſecundis, antecedens ad conſequentem: & vt in primis, conſequens, ad aliam quampiam; ſic in ſecundis, alia quæpiam, ad antecedentem.

Theor.

Theor. 1. *Prop.* 1.

SI ſint quotcunque rationes, quotcunque rationum, æqualium numero, ſingulæ ſingularum equemultiplicatæ: quàm multiplicata eſt vna, vnius; tàm multiplicata eſt compoſita omnium, compoſitæ omnium.

Hypoth.

*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*.

*c*3; *d*3: æquemultiplicata *c*; *d*:

Dico *a*3; *b*3, + *c*3; *d*3: æquemultiplicatam *a*; *b*, + *c*; *d*.

Demonſtr.

hypoth.	*a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*.
hypoth.	*c*3; *d*3: *c*; *d*; + *c*; *d*, + *c*; *d*:
p. p.	*a*3; *b*3, + *c*3; *d*3: *a*; *b*, + *c*; *d*, + *a*; *b*, + *c*; *d*, + *a*; *b*, + *c*; *d*.
hypoth.	Multitudo rationum *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*: æqualis eſt multitudini *c*; *d*, & *c*; *d*, & *c*; *d*: necnon multitudini *a*; *b*, + *c*, *d*, & *a*; *b*, + *c*; *d*, & *a*; *b*, + *c*; *d*.
def. 4. *h.*	*a*3; *b*3, + *c*3; *d*3: æquemultiplicata *a*; *b*, + *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 2. *Prop.* 2.

SI prima ratio, ſecundæ, fuerit æquemultiplicata, atque prima quantitas, eſt multiplex ſecundæ; fuerit autem & tertia ratio, ſecundæ, æquemultiplicata, atque tertia

quantitas, eſt multiplex ſecundæ: erit compoſita ratio ex prima, & tertia, ſecundæ, æquemultiplicata, atque aggregata quantitas ex prima, & tertia, eſt multiplex ſecundæ.

Hypoth.

*a*2; *b*2: multiplicata *a*; *b*. ſicut 2*c*; *c*, multiplex. *a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c*; *c*, multiplex. Dico *a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: multiplicatam *a*; *b*. ſicut 2*c* + 3*c*; *c*, multiplicem.

Demonſtr.

hypoth.	*a*2; *b*2: *a*; *b*, + *a*; *b*. ſicut 2*c*: *c* + *c*. Et quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt *c*, & *c*, quantitates.
hypoth.	*a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b* ſicut 3*c*: *c* + *c* + *c*. Et quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt quantitates, *c*, & *c*, & *c*.
p. p.	*a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*, + *a*; *b*. ſicut 2*c* + 3*c*: *c* + *c* + *c* + *c* + *c*. & quot ſunt rationes *a*; *b*, & *a*; *b*, & *a*; *b*; & *a*; *b*, & *a*; *b*: tot ſunt quantitates, *c*, & *c*, & *c*, & *c*, & *c*.
def.4.h.	*a*2; *b*2, + *a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*: ſicut 2*c* + 3*c*; *c*, multiplex. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

SI prima ratio, ſecundæ, æquèfuerit multiplicata, atque tertia, quartæ; fuerit autem & quinta; ſecundæ,

dæ, æquemultiplicata, atque ſexta, quartæ : erit & compoſita ex prima, & quinta, ſecundæ æquemultiplicata, atq; compoſita ex tertia, & ſexta, quartæ.

Hypoth.

a2; b2: multiplicata *a; b*. ſicut *c2; d2*: multiplicata *c; d*.

a3; b3: multiplicata *a; b*. ſicut *c3; d3*: multiplicata *c; d*.

Dico *a2; b2,+a3; b3*: multiplicatam *a; b*. ſicut *c2; d2,+c3; d3*: multiplicatam *c; d*.

Demonſtr.

hypoth.	*a2; b2*: *a; b,+a; b*. ſicut *c2; d2*: *c; d,+c; d*. Et quot ſunt *a; b*, & *a; b*: tot ſunt *c; d*, & *c; d*.
hypoth.	*a3; b3*: *a; b,+a; b,+a; b*. ſicut *c3; d3*: *c; d,+c; d,+c; d*. Et quot ſunt *a; b*, & *a; b*, & *a; b*: tot ſunt *c; d*, & *c; d*, & *c; d*.
p. p.	*a2; b2,+a3; b3*: *a; b,+a; b,+a; b,+a; b,+a; b*. ſicut *c2; d2,+c3; d3*: *c; d,+c; d,+c; d,+c; d,+c; d*. Et quot ſunt *a; b*, & *a; b*, & *a; b*, & *a; b*, & *a; b*: tot ſunt *c; d*, & *c; d*, & *c; d*, & *c; d*, & *c; d*.
def.4.b.	*a2; b2,+a3; b3*: multiplicata *a; b*. ſicut *c2; d2,+c3; d3*: multiplicata *c; d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor.

Theor. 4. Prop. 4.

SI prima ratio, ſecundæ æquemultiplicata fuerit, atque prima quantitas, ſecundæ; ſumantur autem ratio, & quantitas; & ſumpta ratio, ſit ęquemultiplicata primæ rationis, atque ſumpta quantitas, multiplex primæ quantitatis: erit & ex æquo, ſumpta ratio, ęquemultiplicata ſecundæ rationis, atque ſumpta quantitas, ſecundæ quantitatis.

Hypoth.

*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c*; *c*, multiplex.
*a*6; *b*6: multiplicata *a*3; *b*3. ſicut 6*c*; 3*c*, multiplex.

Dico *a*6; *b*6: multiplicatam *a*; *b*. ſicut 6*c*; *c*, multiplicem.

Demonſtr.

hypoth.	*a*3; *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c*; *c*, multiplex:
2. *h.*	*a*3; *b*3, + *a*3, *b*3: multiplicata *a*; *b*. ſicut 3*c* + 3*c*; *c*, multiplex.
hypoth.	*a*6; *b*6: *a*3; *b*3, + *a*3; *b*3. ſicut 6*c*: 3*c* + 3*c*. Et quot ſunt, *a*3; *b*3, & *a*3; *b*3: tot ſunt 3*c*, & 3*c*.
	*a*6; *b*6: multiplicata *a*; *b*. ſicut 6*c*; *c*, multiplex. Quod &c. Quare &c.

Theor. 5. Prop. 5.

SI prima ratio, ſecundæ æquemultiplicata fuerit, atque tertia, quartæ; ſumantur autem æquemultiplicatæ rationes,

tiones, primæ, & tertiæ: erit & ex æquo, ſumptarum vtraque, vtriuſque, æquemultiplicata; altera quidem ſecundę, altera autem quartæ.

Hypoth.

$a3$; $b3$: multiplicata a; b. ſicut $c3$; $d3$: multiplicata c; d.

$a6$; $b6$: multiplicata $a3$; $b3$. ſicut $c6$; $d6$: multiplicata $c3$; $d3$.

Dico $a6$; $b6$: multiplicatam a; b. ſicut $c6$; $d6$: multiplicatam c; d.

Demonſtr.

hypoth. | $a3$; $b3$: multiplicata a; b. ſicut $c3$; $d3$: multiplicata c; d.

3. b. | $a3$; $b3$, $+a3$; $b3$: multiplicata a; b. ſicut $c3$; $d3$, $+c3$; $d3$: multiplicata c; d.

hypoth. | $a6$; $b6$: $a3$; $b3$, $+a3$; $b3$. ſicut $c6$; $d6$: $c3$; $d3$, $+c3$; $d3$. Et quot ſunt $a3$; $b3$, & $a3$; $b3$: totidem ſunt $c3$; $c3$, & $c3$; $d3$.

| $a6$; $b6$: multiplicata a; b. ſicut $c6$; $d6$: multiplicata c; d. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 6. Propoſ. 6.

SI fuerint, in eadem ratione logarithmica, prima ratio, ad ſecundam, atque prima quantitas, ad ſecundam: etiam multiplicata primæ rationis, & æquemultiplex primæ quantitatis, ad multiplicatam, ſecundæ rationis, &

æque-

æquemultiplicem ſecundæ quantitatis, in eadem erunt lo garithmica ratione.

Hypoth.

Sint rationes *A*, & *B*; & quantitates *a*, & *b*: & ſit ratio *A*, ad rationem *B*, logarithmicè; ſicut quantitas *a*, ad quantitatem *b*. Sitque ratio 3*A*, multiplicata rationis *A*; ſicut quantitas 3*a*, multiplex quantitatis *a*: item ratio 4*B*, multiplicata rationis *B*; ſicut quantitas 4*b*, multiplex quantitatis *b*.

Dico rationem 3*A*, ad rationem 4*B*, eſſe logarithmicè ſicut quantitas 3*a*, ad quantitatem 4*b*.

Præpar.

Accipiatur ratio 6*A*, multiplicata rationis 3*A*; & quantitas 6*a*, æquemultiplex quantitatis 3*a*: item ratio 20*B*, multiplicata rationis 4*B*; & quantitas 20*b*, ęquemultiplex quantitatis 4*b*.

Demonſtr.

4. *b.* Ratio 6*A*, æquemultiplicata eſt rationis *A*; atque quantitas 6*a*, multiplex eſt quantitatis *a*: item ratio 20*B*, æquemultiplicata eſt rationis *B*; atque quantitas 20*b*, multiplex eſt quantitatis *b*.
hypoth. Sunt autem rationes *A* ad *B* logarithmicè, ſicut quantitates *a* ad *b*.
def.8.b. Ergo ſi ratio 6*A*, eſt altior ratione 20*B*; etiam quantitas 6*a*, maior eſt quantitate 20*b*: ſi ęquealta; æqualis: ſi depreſſior; minor.
conſtr. Sed eſt ratio 6*A*, æquemultiplicata rationis 3*A*; atque quantitas 6*a*, multiplex

tiplex quantitatis $3a$: & ratio $20B$, rationis $4B$, æquemultiplicata eſt; atque quantitas $20b$, quan-
def.8.h. titatis $4b$. Ergo rationes $3A$, ad $4B$, ſunt logarithmicè; ſicut quantitates, $3a$, ad $4b$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

SI prima ratio, ad ſecundam, eamdem habuerit rationem logarithmicè, atque tertia, ad quartam: etiam æquemultiplicatæ rationes primæ, & tertiæ, ad æquemultiplicatas ſecundæ, & quartæ, iuxta quamuis multiplicationem, eamdem habebunt rationem, ſi prout inter ſe reſpondent, ita ſumptæ fuerint.

Hypoth.

Sunto rationes quatuor A ad B, & C ad D, logarithmicè proportionales: & ſunto ipſarum A, C, æquemultiplicatæ rationes $3A$, $3C$: necnon ipſarum B, D, æquemultiplicatæ, $4B$; $4D$.

Dico quatuor rationes $3A$ ad $4B$, & $3C$ ad $4D$, logarithmicè proportionales eſſe.

Præpar.

Sumantur ipſarum $3A$, $3C$, æquemultiplicatæ rationes $6A$, $6C$: & ipſarum $4B$, $4D$, æquemultiplicatæ, $20B$, $20D$.

Demonſt.

4. h. Rationes $6A$, $6C$, æquemultiplicatæ ſunt rationum, A, C: & $20B$, $20D$, æquemultiplicatæ

 ſunt

hypoth. ſunt rationum *B*, *D*. ſuntque *A* ad *B*, logarithmicè proportionales, vt *C* ad *D*. Ergo ſi 6*A*, altior eſt, quàm 20*B*; etiam 6*C*, altior eſt, quàm 20*D*: ſi æquealta; æquealta: ſi depreſſior; depreſſior. *hypoth.* Et ſunt 6*A*, 6*C*, ipſarum 3*A*, 3*C*, æquemultiplicatæ; necnon 20*B*, 20*D*, ipſarum 4*B*, 4*D*, ęquemultiplicatæ. *def.12.h* Ergo 3*A* ad 4*B*, & 3*C* ad 4*D*, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

def.12.h

Quare &c.

Theor. 8. Prop.

SI fuerint duæ rationes, ſingulæ, ex binis compoſitæ, altiores, ex depreſſioribus, & quodammodo totæ, ex abſciſſa, & reſidua: fuerit autem vna tota ratio, ad alteram totam, æquemultiplicata; atque ſua abſciſſa, ad alterius abſciſſam: erit & æquemultiplicata; atque ſua reſidua, ad alterius reſiduam.

Hypoth.

Ratio *A+B*, ex rationibus *A*, & *B*, altior, ex depreſſioribus, componitur; item *C+D* ratio, ex rationibus *C*, & *D*, componitur: & eſto *A+B*, ad *C+D*, æquemultiplicata, atque *A* ad *C*.

Dico *A+B* ad *C+D*, æquemultiplicatam etiam eſſe, atque *B* ad *D*.

Præpar.

Fiat ratio *G* ad *D*, æquemultiplicata, atque *A* ad *C*.

De-

Demonſtr.

p. h.	*A+G* ad *C+D*, æquemultiplicata eſt, atque *A* ad *C*.
hypoth.	*A+B* ad *C+D*, ęquemultiplicata eſt, atque *A* ad *C*.
p. p.	*A+B* ratio, eadem eſt, quæ *A+G*.
	Et compoſita vtrimque conuerſa rationis *A*,
p. p.	*B* ratio, eadem eſt, quæ *G*.
p. p.	*B* ad *D*, æquemultiplicata eſt, atque *A* ad *C*.
p. h.	*A+B* ad *C+D*, æquemultiplicata eſt, atque *B* ad *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Prop. 9.

SI ratio, & quantitas, cuiuſdam rationis, & cuiuſdam quantitatis, æquè ſint multiplicata, & multiplex; & abſciſſa ratio, & abſciſſa quantitas, eiuſdem rationis, & eiuſdem quantitatis, æquè ſint multiplicata, & multiplex: reſidua ratio, & reſidua quantitas, eiuſdem rationis, & eiuſdem quantitatis, vel ſunt æquealta, & æqualis; vel æquè ſunt multiplicata, & multiplex.

Hypoth.

Ratio *A+B*, rationis *C*, æquemultiplicata eſt, atque quantitas *a+b*, multiplex quantitatis *c*; & ratio *A*, rationis *C*, æquemultiplicata eſt, atque quantitas *a*, multiplex quantitatis *c*.

Dico quòd, vel *B* æquealta eſt ipſi *C*; ſicut *b*, æqualis ipſi *c*: vel *B* æquemultiplicata eſt ipſius *C*; ſicut *b*

multiplex ipſius *c*.

Demonſtr.

hypoth. Numerus rationum *C*, ex quibus *A*+*B* componitur, idem eſt qui quantitatum *c*, ex quibus *a*+*b* colligitur: item numerus rationum *C* ex quibus *A* componitur, idem eſt qui quantitatum *c*, ex quibus *a* componitur. Quorum numerorum, vel eſt differentia vnitas, vel numerus.

Si vnitas eſt differentia; vna eſt ratio *C*, quacum compoſita ratio *A*, facit rationem *A*+*B*; & vna eſt quantitas *c*, quacum compoſita quantitas

hypoth. *a*, facit quantitatem *a*+*b*. Sed & *B* ratio eſt, quacum compoſita *A*, facit rationem *A*+*B*; & *b* quantitas eſt, quacum compoſita *a*, facit quantitatem *a*+*b*. Ergo *B* ęquealta eſt ipſi *C*; atque *b* æqualis ipſi *c*.

Si verò numerus eſt differentia, tot ſunt rationes *C*, quibuſcum compoſita ratio *A*, facit rationem *A*+*B*; totidemque ſunt quantitates *c*, quibus cum compoſita quantitas *a*, facit quantita-

hypoth. tem *a*+*b*. Sed *B* ratio eſt, quacum compoſita ratio facit rationem *A*+*B*; & *b* quantitas, quacum compoſita quantitas *a*, facit quantitatem *a*+*b*. Ergo quot ex *C* rationibus componitur *B*; tot ex *c*, quantitatibus componitur *b*. Ergo *B* ad *C*, æquemultiplicata eſt, atque *b* ad *c*, mul-

def.4.b. tiplex. Ergo *B* ad *C*, vel æquealta eſt: atque

b ad

b ad *c*, æqualis: vel æquemultiplicata eſt; atque multiplex. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 10. *Prop.* 10.

SI duæ rationes, duarum rationum, ſint æquemultiplicatæ; & abſciſſæ quædam, ſint earumdem æquemultiplicatæ: & reſiduæ, eiſdem, aut æquealtæ ſunt, aut æquemultiplicatæ.

Hypoth.

Ratio *A+B*, rationis *C*, æquemultiplicata eſt, atque ratio *D+E*, rationis *F*; & ratio *A*, rationis *C*, æquemultiplicata eſt, atque ratio *D*, rationis *F*.

Dico rationem *B* rationis *C*, æquealtam eſſe, atque ratio *E* rationis *F*; vel æquemultiplicatam.

Demonſtr.

hypoth. Quot ex *C* rationibus, ratio *A+B* componitur, idem numerus eſt, indicans etiam, quot ex *F* rationibus, componitur ratio *D+E*. & quot ex *C* rationibus, ratio *A* componitur, idem numerus eſt, indicans etiam, quot ex *F* rationibus, ratio *D* componitur: quorum numerorum vel eſt differentia vnitas, vel numerus.

Si vnitas eſt differentia: vna eſt ratio *C*, quacum compoſita ratio *A*, facit rationem *A+B*; & vna eſt ratio *F*, quacum compoſita ratio *D*, facit rationem *D+E*. Sed & *B* cum *A*, & *E* cum *D*, fa- *hypoth.*

D, faciunt rationes compoſitas $A+B$, & $D+E$. Ergo B ad C eadem eſt, & æquealta, atque ratio E ad F. ſi enim binæ non eſſent æquealtę; eſſet vna binarum, æqualitati propior, quàm altera, & non eſſent eędem inter ſe.

Si verò numerus eſt differentia: totidem ſunt rationes C, quibuſcum ratio A compoſita, facit $A+B$ rationem; quot etiam rationes F, quibuſcum ratio D compoſita, facit $D+E$ rationem.

hypoth. Sed & B cum A, & E cum D, faciunt rationes

def.4.h. compoſitas $A+B$, & $D+F$. Ergo B ad C ęquemultiplicata eſt, atque E ad F. Ergo B ad C, vel æquęalta eſt, vel æquemultiplicata, atque E ad F. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 11. Propoſ. 11.

ÆQuealtæ, ad eamdem, eamdem habent rationem logarithmicam: & eadem, ad ęquealtas.

Hypoth.

Rationes A, & B ſunt æquealtæ.

Dico A rationem, ad C, eſſe logarithmicè, vt B, ad C. Et C rationem, ad A, eſſe logarithmicè, vt C, ad B.

Præpar.

Sumantur ipſarum A, B, æquemultiplicatæ rationes D, E: & ſumatur F ratio multiplicata, rationis C.

De-

Demonſtr.

def.5.b. Quoniam *A* ad *C*, ratio eſt logarithmica; cuius inæqualitatis eſt ratio *C*, eiuſdẽ eſt & *A*: item quoniam *B* ad *C*, ratio eſt logarithmica; cuius inæqualitatis eſt *C*, eiuſdem eſt & *B*: ergo *A*, *B* rationes, eiuſdem inter ſe ſunt inæqualitatis: & ſunt *A*, *B* æquealtæ; ergo ſunt eædem inter ſe. ſi enim non eſſent eædem inter ſe, eſſet vna remotior ab ęqualitate, quàm altera, & non eſſent ęquealtæ. Sumptæ autem ſunt *D*, *E* æquemultiplicatæ rationum *A*, *B* earumdem inter ſe: ergo p. p. etiam *D*, *E*, ſunt eædem inter ſe rationes, & æquealtę. Ergo ſi *D* eſt altior, quàm *F*, etiam *E* altior eſt, quàm *F*: ſi æquealta; æquealta: ſi de- def.12.b preſſior; depreſſior. Ergo ratio *A* ad *C*, eſt logarithmicè, ſicut ratio *B* ad *C*. Quod &c. Necnon ratio *C* ad *A*, eſt logarithmicè, ſicut *C* ad *B*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 12. *Prop.* 12.

RAtionum non æquealtarum, altior ad eandem, maior eſt logarithmicè, quàm depreſſior: & eadem ad depreſſiorem, maior eſt logarithmicè, quàm ad altiorem.

Hypoth.

Eſto ratio *A+B* altior, quàm *B*.

Dico *A+B*, ad *C*, maiorem eſſe logarithmicè, quàm *B*, ad *C*. Et

Et C, ad B, maiorem logarithmicè, quàm C, ad A+B.

Præpar. & Demonſtr.

Sumatur A ratio, quæ cum B, componit rationem A+B: & duarum rationum A, B, ſumatur altera non altior, quæ ſit A: & rationis A, to- *def.7.h.* tuplicata D, quoties oportet, vt fiat altior, quàm C; & rationis B, æquemultiplicata ſumatur E.

Quoniam A, non eſt altior, quàm B; & D, E ſunt æquemultiplicatæ ipſarum A, B: oportet D non eſſe altiorem, quàm E. ſi enim eſſet altior; ex ijſdem, vel ex propioribus æqualitati, vtriſq; ma- *cõtra p. p.&p.3.* ioris, vel vtriſque minoris inęqualitatis rationibus, eſſet remotior ab ęqualitate ratio compoſita. ergo D, eſt altior, quàm C: ergo E, eſt altior, quàm C.

Sumatur ipſius C, bis, ter, quater, vel deinceps, *def.7.h.* quoties oportet, multiplicata ratio F, vt fiat primò altior quàm E. Quare ratio F, non eſt altior, quàm ratio E+C: eſt autem D altior, quàm C: ergo D+E altior eſt, quàm E+C. alioquin ex remotioribus ab æqualitate rationibus, vtriſque maioris, vel vtriſque minoris inæqualitatis, non altior fieret compoſita ratio, ideoque non remotior ab æqualitate, *contra p. p. & p. 3.* Sed F. non eſt altior, quàm E+C: ergo D+E, eſt altior, quàm F: & eſt E depreſſior, quàm F: & ſunt D, E rationes æquemultiplicatæ, rationum A, B: *p. h.* & D+E ratio, eſt ęquemultiplicata, rationis A+B:

Ergo

def.14.h Ergo $A+B$ ratio, ad rationem *C*, maior eſt logarithmicè, quàm *B* ad *C*. Quod &c. Et ratio
def.14.h *C*, ad rationem *B*, maior eſt logarithmicè, quàm *C*, ad $A+B$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. *Prop.* 13.

QVæ, ad eamdem, eamdem habent rationem logarithmicam; inter ſe ſunt eædem rationes logarithmicę: & ad quas eadem, eamdem habet logarithmicam; inter ſe ſunt eædem rationes logarithmicæ.

Hypoth. 1.

Ratio *A* ad rationem *C*, eſto logarithmicè, ſicut ratio *B* ad rationem *C*.

Dico rationes *A*, *B*, eſſe eaſdem inter ſe.

Demonſtr.

Quoniam *A* ad *C*, & *B* ad *C*, ſunt rationes
def.5.h. logarithmicæ; cuius inęqualitatis eſt *C* ratio, maioris, vel minoris; eiuſdem ſunt *A*, & *B* rationes: quæ ſi non eædem eſſent inter ſe, non eſſent æquealtæ: & aſſignaretur earum altera altior. Aſſignetur
12. h. *A*, ſi fieri poteſt, altior, quàm *B*: ergo *A* ad *C*, maior eſt logarithmicè, quàm *B*. *contra hypoth.* Ergo rationes *A*, *B*, ſunt eædem inter ſe. Quod &c.

Hypoth. 2.

Ratio *C*, ad rationem *A*, eſto logarithmicè, ſicut ratio *C*, ad rationem *B*.

Dico rationes *A*, *B*, eſſe eaſdem inter ſe.

Demonſtr.

12. *b.* Aſſignetur *A*, ſi fieri poteſt depreſſior, quàm *B*: Ergo *C* ad *A*, maior eſt logarithmicè, quàm ad *B*: *contra hypoth.* Ergo *A* non eſt depreſſior, quàm *B*: item demonſtrabitur, quod neque *B*
11. *b.* eſt depreſſior, quàm *A*: ſunt ergo *A*, *B* rationes æquealtæ, & eædem inter ſe. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 14. *Prop.* 14.

RAtionum, ad eamdem rationem, quæ maior eſt logarithmicè, illa eſt altior: & ad quàm, eadem maior eſt logarithmicè, illa eſt depreſſior.

Hypoth. 1.

Ratio *A*, maior eſt logarithmicè ad *C*, quàm *B*.
Dico *A*, altiorem eſſe, quàm *B*.

Demonſtr.

Eſto *A* non altior, quàm *B*, ſi fieri poteſt: erit itaque vel æquealta, vel depreſſior. Sunto *A*, *B*
11. *b.* æquealtæ, ſi fieri poteſt: Ergo *A* ad *C*, eſt logarithmicè, ſicut *B*. *contra hypoth.* Eſto *A* depreſ-
12. *b.* ſior, quàm *B*, ſi fieri poteſt. Ergo *B* ad *C*, minor eſt logarithmicè, quàm *A*. *contra hypoth.* Ergo *A*, non eſt æquealta, neque depreſſior, quàm *B*: ergo eſt altior. Quod &c.

 Hy-

Hypoth. 2.

Ratio *C* ad *A*, maior eſt logarithmicè, quàm ad *B*.

Dico *A*, depreſſiorem eſſe, quàm *B*.

Demonſtr.

Eſto *A* non depreſſior, quàm *B*, ſi fieri poteſt: erit itaque vel æquealta, vel altior. Sunto *A*, *B*
11. *h.* æquealtæ, ſi fieri poteſt. Ergo *C* ad *A*, eſt logarithmicè, ſicut ad *B*. *contra hypoth.* Eſto *A* altior,
12. *h.* quàm *B*, ſi fieri poteſt. Ergo *C* ad *A*, minor eſt logarithmicè, quàm ad *B*. *contra hypoth.* Ergo *A* non eſt æquealta, neque altior, quàm *B*: ergo eſt depreſſior. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 15. *Prop.* 15.

QVæ eidem ſunt eædem rationes, inter ſe ſunt eędem, tùm logarithmicè, tùm abſolutè.

Hypoth. 1.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè ſunt, vt quantitates *c* ad *d*: & *c* ad *d* quantitates, vt quantitates *e* ad *f*.

Dico rationes *A* ad *B*, logarithmicè eſſe, ſicut quantitates *e* ad *f*.

Hypoth. 2.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè ſunt, vt quantitates *c* ad *d*: & *c* ad *d* quantitates, ſunt ſicut logarithmicè rationes *E* ad *F*.

Dico rationes *A* ad *B*, eſſe logarithmicè, ſicut rationes *E* ad *F*.

 Hy-

Hypoth. 3.

Quantitates *a* ad *b*, ſunt inter ſe, ſicut logarithmicè, rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè ſunt, ſicut quantitates *e* ad *f*.

Dico *a* ad *b*, eſſe vt *e* ad *f*.

Hypoth. 4.

Quantitates *a* ad *b*, ſunt inter ſe, ſicut logarithmicè, rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè ſunt, vt rationes *E* ad *F*.

Dico quantitates *a* ad *b* eſſe, ſicut logarithmicè, rationes *E* ad *F*.

Hypoth. 5.

Rationes *A* ad *B*, logarithmicè ſunt, vt rationes *C* ad *D*: & rationes *C* ad *D*, logarithmicè, vt rationes *E* ad *F*.

Dico rationes *A* ad *B* logarithmicè eſſe, ſicut rationes *E* ad *F*.

Præpar. comm.

Sumantur ipſarum rationum, vel quantitatum *A*, *C*, *E*, æquemultiplicatæ, & æquemultiplices, 3*A*, 3*C*, 3*E*: necnon ipſarum *B*, *D*, *F*, æquemultiplicatæ, & æquemultiplices, 4*B*, 4*D*, 4*F*.

Demonſtr. comm.

def. 8 vel 12. h. vel 65. Si 3*A*, altior eſt, vel maior, quàm 4*B*; etiam 3*C*, altior eſt, vel maior, quàm 4*D*. Quod ſi 3*C*, altior eſt, vel maior, quàm 4*D*; etiam 3*E* altior eſt, vel maior, quàm 4*F*. Ergo ſi 3*A* altior eſt,

vel

vel maior, quàm $4B$; etiam $3E$ altior eſt, vel maior, quàm $4F$. Item ſi æquealta, vel æqualis; etiam æquealta, vel æqualis: ſi depreſſior, vel minor; etiam depreſſior, vel minor. Ergo proportionales ſunt ſiue rationes, ſiue quantitates, vel mixtim A ad B, ſicut E ad F: tùm logarithmiſiè, ſiquæ ſunt rationes; tùm abſolutè, ſi nullæ ſunt rationes, ſed ſolùm quantitates. Quod &c.

def 8 vel 2. h. vel 5. 5.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

SI ſint quotcunque rationes logarithmicè proportionales, quemadmodum ſe habuerit logarithmicè vna antecedentium ad vnam conſequentium; ita logarithmicè ſe habebit compoſita ex omnibus antecedentibus, ad compoſitam ex omnibus conſequentibus.

Hypoth.

Rationes A ad B, & C ad D, & E ad F, ſunt logarithmicè proportionales. Ex rationibus A, C, & E compoſita eſt $A+C+E$: & ex rationibus B, D, & F compoſita eſt $B+D+F$.

Dico $A+C+E$ ad $B+D+F$, & A ad B, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum A, C, E ſumantur æquemultiplicatæ rationes $3A$, $3C$, $3E$: ex quibus compoſita ratio $3A+3C+3E$. Item rationum B, D, F, ſumantur æquemultiplicatæ

catæ rationes $4B$, $4D$, $4F$: ex quibus compoſita ratio $4B+4D+4F$.

Demonſtr.

def.12.b Quoniam A ad B, & C ad D, ſunt logarithmicè proportionales: ſi $3A$ altior eſt, quàm $4B$; etiam $3C$ altior eſt, quàm $4D$: ſi æquealta; æquealta: ſi depreſſior; depreſſior. Item quoniam C ad D, & E ad F, ſunt logarithmicè proportionales: ſi $3C$ altior eſt, quàm $4D$; etiam $3E$, altior eſt, quàm $4F$: ſi æquealta; æquealta: ſi depreſſior; depreſſior. Ergo ſi $3A$, altior eſt, quàm $4B$: etiam $3A+3C+3E$ altior eſt quàm $4B+4D+4F$: ſi æquealta; æquealta: ſi depreſſior; depreſſior. & eſt $3A+3C+3E$ ad $A+C+E$, totuplicata, quotuplicata eſt $3A$ ad A: item $4B+4D+4F$, ad $B+D+F$. totuplicata eſt, quotuplicata $4B$ ad B. Ergo $A+C+E$ ad $B+D+F$, & A ad B, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

p. b.

def.12.b

Quare &c.

Theor. 17. *Propoſ.* 17.

SI ſex vel rationum, vel & quantitatum mixtim, prima ad ſecundam eamdem habuerit rationem, quàm tertia ad quartam: tertia verò ad quartam maiorem habuerit, quàm quinta ad ſextam: etiam prima ad ſecundam, maiorem habebit, quàm quinta ad ſextam.

Hypoth. 1.

Quantitates *a* ad *b*, & *c* ad *d*, ſunt proportionales: ſed quantitatum *c* ad *d* ratio, maior eſt, quàm logarithmica, *E* ad *F* rationum.

Dico quantitatum *a* ad *b* rationem maiorem eſſe, quàm logarithmica *E* ad *F* rationum.

Hypoth. 2.

Quantitates *a* ad *b*, & rationes *C* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales: ſed rationum logarithmica ratio *C* ad *D*, maior eſt quàm quantitatum *e* ad *f*.

Dico *a* ad *b* maiorem eſſe, quàm *e* ad *f*.

Hypoth. 3.

Rationes *A* ad *B*, & quantitates *c* ad *d*, ſunt logarithmicè proportionales: ſed quantitatum ratio *c* ad *d*, maior eſt, quàm *e* ad *f*.

Dico rationum logarithmicam *A* ad *B*, maiorem eſſe, quàm *e* ad *f*.

Hypoth. 4.

Quantitates *a* ad *b*, & rationes *C* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales: ſed rationum *C* ad *D* logarithmicè maior eſt, quàm *E* ad *F*.

Dico quantitatum *a* ad *b* rationem maiorem eſſe, quàm rationum logarithmica *E* ad *F*.

Hypoth. 5.

Rationes *A* ad *B*, & quantitates *c* ad *d* ſunt proportionales logarithmicè: ſed quantitatum *c* ad *d*, maior eſt rato, quàm logarithmica rationum *E* ad *F*.

Dico

Dico *A* ad *B*, maiorem eſſe logarithmicè, quàm *E* ad *F*.

Hypoth.6.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D* ſunt proportionales: ſed *C* ad *D* ratio, logarithmicè maior eſt, quàm *e* ad *f*.

Dico rationum *A* ad *B* logarithmicam rationem, maiorem eſſe, quàm quantitatum *e* ad *f*.

Hypoth.7.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, ſunt proportionales: ſed *C* ad *D* rationum ratio logarithmicè maior eſt quàm *E* ad *F* ratio logarithmica.

Dico *A* ad *B* logarithmicè maiorem eſſe, quàm *E* ad *F*.

Præpar. comm.

Sumantur æquemultiplicatę rationum rationes, & ęquemultiplices quantitatum quantitates; antecedentium *A*, *C*, *E*, antecedentes 3*A*, 3*C*, 3*E*; & conſequentium *B*, *D*, *F* conſequentes 4*B*, 4*D*, 4*F*: ſecundum eas multiplicationes; quibus 3*C*, altior quidem eſt, vel maior, quàm 4*D*; ſed 3*E*, non altior, vel non maior eſt, quàm 4*F*.

Demonſtr. communi.

def 8 vel 12.b. vel 6. 5. def. 10. vel 11. vel 14.b vel 8.5.

Quoniam 3*C* eſt altior, vel maior, quàm 4*D*: ergo etiam 3*A* eſt altior, vel maior, quàm 4*B*: & interim 3*E* non altior eſt, vel non maior, quàm 4*F*. ergo *A* ad *B*, maior eſt, quàm *C* ad *D*, ſiuè logarithmicè, ſiuè abſolutè. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 18. *Prop.* 18.

RAtionum logarithmicè proportionalium, ſi prima fuerit altior, quàm tertia: erit & ſecunda altior, quàm quarta: ſi æquealta; æquealta: ſi depreſſior; depreſſior.

Hypoth. commun.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Altior eſt ratio *A*, ratione *C*.

Dico, quòd altior eſt ratio *B*, ratione *D*.

Demonſtr.

Eſto, ſi fieri poteſt, non altior *B* ratio, quàm *D*: ergo vel eſt æquealta, vel depreſſior. Eſto ſi
12. *h.* fieri poteſt æquealta. Ergo *A* ad *B*, maior eſt
11. *h.* logarithmicè, quàm *C* ad *B*: ſed *C* ad *B* eadem
17. *h.* eſt logarithmicè, quæ *C* ad *D*. Ergo *A* ad *B* maior eſt logarithmicè quàm *C* ad *D*, *contra hypoth.* Non ſunt ergo *B*, *D* rationes æquealtæ.

12. *h.* Eſto, ſi fieri poteſt, *B* depreſſior, quàm *D*. Ergo *C* ad *B*, maior eſt logarithmicè, quàm *C* ad
hypoth. *D*. Sed *A* ad *B*, eſt logarithmicè, vt *C* ad *D*. Er-
17. *h.* go *C* ad *B*, maior eſt logarithmicè, quàm *A* ad
14. *h.* *B*. Ergo *C* altior eſt, quàm *A*. *contra hypoth.* Non eſt ergo *B* depreſſior, quàm *D*; neque æquealta: ergo *B* eſt altior, quàm *D*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ ſunt rationes *A*, *C*.

Dico quòd & æquealtæ ſunt rationes *B*, *D*.

Demonſt.

Sunto *B*, *D* non æquealtæ, ſi fieri poteſt: &
12. *b.* eſto *B* altior, quàm *D*. Ergo *C* ad *D*, maior
hypoth. eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Sed *A* ad *B*, eadem
17. *b.* eſt logarithmicè, quæ *C* ad *D*. Ergo *A* ad
14. *b.* *B*, maior eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Ergo *A*, altior eſt, quàm *C*. *contra hypoth.* Sunt ergo *B*, *D* æquealtæ. Quod &c.

Hypoth.

Depreſſior eſt *A*, quàm *C*.

Dico quòd & *B* depreſſior eſt, quàm *D*.

Demonſtr.

hypoth. Altior eſt *C* quàm *A*: & eſt *C* ad *D* logari-
ſup. thmicè, vt *A* ad *B*: ergo altior eſt *D*, quàm *B*:
def. 2. *b.* ergo depreſſior eſt *B*, quàm *D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 19. *Prop.* 19.

SVbmultiplicatæ rationes, cum pariter multiplicatis, in eadem ſunt ratione logarithmica, ſi prout ſibi mutuò reſpondent, ita ſumantur.

Hypoth.

Rationũ *A*, *B*, ſunt æquemultiplicatę rationes 3 *A*, 3 *B*.

Dico *A* ad *B*, atque 3 *A* ad 3 *B*, eſſe logarithmicè proportionales.

De-

Demonſtr.

Rationes *A* ad *B*, & *A* ad B, & *A* ad B, quot-
6. *b.* cunque oportet, acceptæ, ſunt proportionales: ergo ex antecedentibus compoſita 3*A*, ad ex conſequentibus compoſitam 3B, eſt logarithmicè, vt *A* ad B. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. *Prop.* 20.

RAtiones logarithmicè proportionales, permutando, ſunt logarithmicè proportionales.

Hypoth.

Sint rationes logarithmicè proportionales, *A* ad B, vt *C* ad *D*.

Dico permutando, eſſe logarithmicè proportionales, *A* ad *C*, vt B ad *D*.

Præpar.

Rationum *A*, *B*, ſumantur æquemultiplicatę 3*A*, 3B: & rationum *C*, *D*, æquemultiplicatæ 2*C*, 2*D*.

Demonſtr.

19. *b.* Rationes 3*A* ad 3*B*, & *A* ad *B*, ſunt lo-
hypoth. garithmicè proportionales. item *A* ad *B*, & *C*
19. *b.* ad *D*. item *C* ad *D*, & 2*C* ad 2*D*. Ergo
15. *b.* 3*A* ad 3*B*, & 2*C* ad 2*D* ſunt logarithmicè
18. *b.* proportionales. Ergo ſi 3*A*, eſt altior, quàm 2*C*; etiam 3*B*, eſt altior, quàm 2*D*: ſi æque-
def. 12. *b.* alta; æquealta: ſi depreſſior; depreſſior. Ergo *A*

 ad C,

ad *C*, & *B* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. *Prop.* 21.

RAtiones inter ſe, vel & cum quantitatibus, logarithmicè proportionales, diuidendo, ſunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Rationes *A+B* ad *B*, & *C+D* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales.

Dico diuidendo rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Sumantur ipſarum *A*, *B*, *C*, *D*, æquemultiplicatæ 3*A*, 3*B*, 3*C*, 3*D*: necnon ipſarum *C*, *D*, aliæ quælibet æquemultiplicatæ 4*C*, 4*D*.

Demonſtr.

Rationes 3*A*, 3*B*, ęquemultiplicatæ ſunt rationum *A*, *B*: Ergo ratio 3*A*+3*B* totuplicata eſt rationis *A+B*, quotuplicata eſt 3*A* ipſius *A*: necnon 3*C*, & 3*D* ipſarum *C*, & *D*: necnon ratio 3*C*+3*D* rationis *C+D*.

p. h.
conſtr.
p. h.

Rationes quoque 3*C*, 3*D*, rationum *C*, *D*; & rationes 4*C*, 4*D*, earumdem *C*, *D* rationum ſunt æquemultiplicatæ: ergo etiam 7*C*, 7*D*, earumdem *C*, *D* rationum ſunt æquemultiplicatæ.

conſtr.
3. h.

Et

hypoth. Et quoniam rationes $A+B$ ad B, & $C+D$ ad D, ſunt logarithmicè proportionales: ſi $3A+3B$, altior eſt, quàm $7B$; etiam $3C+3D$, altior eſt, quàm $7D$: ſi æquealta; ęquealta: ſi depreſſior; depreſſior. def.12.b

Sed ſi $3A$ altior eſt, quàm $4B$; adcompoſita communi ratione $3B$; etiam $3A+3B$ altior eſt, quàm $7B$. nam eiuſdem maioris, vel eiuſdem minoris inæqualitatis, ex remotioribus rationibus ab æqualitate, compoſita ratio, eſt remotior; & ex propioribus, propior. & oſtenſum eſt, quòd ſi $3A+3B$, altior eſt quàm $7B$; etiam $3C+3D$, altior eſt, quàm $7D$: & ſepoſita communi ratione $3D$; altior eſt $3C$, quàm $4D$. nam ſi $3C$, non eſſet altior, quàm $4D$: compoſita, $3D$; fieret ratio $3C+3D$, non altior, quàm $7D$. *contra ſuperiùs probata*. 4. 3. 4. 3.

Ergo ſi $3A$ altior eſt, quàm $4B$, etiam $3C$ altior eſt, quàm $4D$: ſimiliter oſtendetur, ſi ęquealta; æquealta: ſi depreſſior; depreſſior. Ergo A ad B, eſt logarithmicè, vt C ad D. Quod &c. def.12.b

Hypoth.2.

Rationes $A+B$ ad B, & quantitates $a+b$ ad b, ſunt logarithmicè proportionales.

Dico diuidendo, rationes A ad B, & quantitates a ad b eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum *A*, *B*, & quantitatum *a*, *b*, ſumantur ęquemultiplicatę rationes $3A$, $3B$, & æquemultiplices quantitates $3a$, $3b$. item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata ratio $4B$, & æquemultiplex quantitas $4b$.

Demonſtr.

p. h. Ratio $3A+3B$, totuplicata eſt rationis $A+B$, quotuplicata eſt $3A$, ipſius *A*; & quantitas $3a$, quantitatis *a*; & quantitas $3b$, quantitatis *b*; & quantitas $3a+3b$, quantitatis $a+b$.

conſtr. *p. 5.*

conſtr. Quantitates quoque $3a$, $3b$, quantitatum *a*, *b*; & quantitates $4a$, $4b$, earumdem *a*, *b*, ſunt æquemultiplices: ergo $7a$, $7b$, earumdem *a*, *b*, ſunt æquemultiplices.

2. 5.

hypoth. Et quoniam rationes $A+B$ ad *B*, & quantitates $a+b$ ad *b*, ſunt logarithmicè proportionales: ſi $3A+3B$, altior eſt, quàm $7B$; etiam $3a+3b$, maior eſt, quàm $7b$: ſi æquealta; æqualis: ſi depreſſior; minor.

def 8. h.

ſup. Sed ſi $3A$, altior eſt, quàm 4B; etiam $3A+3B$, altior eſt, quàm 7B: & ſi $3a+3b$, maior eſt, quàm $7b$; etiam, dempta communi $3b$, relinquitur $3a$, maior quàm $4b$. Ergo ſi $3A$, altior eſt, quàm $4B$; etiam $3a$, maior eſt, quàm $4b$: & ſimiliter oſtendetur, ſi æquealta; æquali: ſi dedreſſior; minor. Ergo rationes *A* ad *B*, & quantitates *a* ad *b*, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c. Quare &c.

def. 8. h.

Theor. 22. Prop. 22.

RAtiones inter ſe, vel & cum quantitatibus, logarithmicè proportionales, componendo, ſunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales.

Dico componendo, rationes *A+B* ad *B*, & *C+D* ad *D*, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Aſſumatur *E* ratio, ad quàm *C+D* ſit logarithmicè, ſicut *A+B* ad B.

Demonſtr.

conſtr. | Quoniam *A+*B ad B, & *C+D* ad *E*, ſunt lo-
21. *h.* | garithmicè proportionales: ergo diuidendo *A*
ad B, & *C+D—E* ad *E*, ſunt logarithmicè
hypoth. | proportionales. Sed *A* ad B, & *C* ad *D* ſunt
15. *h.* | logarithmicè proportionales. Ergo *C* ad *D*, &
C+D—E ad *E*, ſunt logarithmicè proportionales. Ergo *D*, æquealta eſt, ideoque eadem, atque *E*.

18. *h.* | Nam ſi *D*, eſſet altior, quàm *E*: eſſet *C* altior,
4. 3. | quàm *C+D—E*. Sed contra, eſſet *C+D* altior,
4. 3. | quàm *C+E*: & *C+D—E*, altior, quàm *C*: quod eſt contradictio. Rurſum ſi *D*, eſſet depreſſior,
18. *h.* | quàm *E*: eſſet *C*, depreſſior, quàm *C+D—E*.
4. 3. | Sed contra, eſſet *C+D*, depreſſior; quàm *C+E*:

&

4. 3. & $C+D-E$, depreſſior, quàm C: quod eſt contradictio.

Ergo D eadem eſt, atque E. Ergo $C+D$ ad
18. *h.* D, & $C+D$ ad E, ſunt proportionales logarithmi-
conſtr. cè. Sed $A+B$ ad B eſt vt $C+D$ ad E: ergo A
15. *h.* $+B$ ad B, eſt vt $C+D$ ad D logarithmicè. Quod &c.

Hypoth. 2.

Rationes A ad B, & quantitates a ad b, ſunt logarithmicè proportionales.

Dico componendo, rationes $A+B$ ad B, & quantitates $a+b$ ad b, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Aſſumatur e quantitas, ad quàm, $a+b$ eſt logarithmicè, ſicut ratio $A+B$, ad rationem B.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam $A+B$ ad B, & $a+b$ ad c, ſunt logarithmicè proportionales: ergo diuidendo A ad B, & $a+b-c$ ad c, ſunt logarithmicè, propor-
hypoth. tionales. Sed A ad B, & a ad b, ſunt logari-
15. *h.* thmicè proportionales. Ergo a ad b, & $a+b-c$ ad c, ſunt proportionales. Ergo b, c, ſunt quantitates æquales.

14. 5. Nam ſi b, maior eſſet, quàm c: eſſet a, maior, quàm $a+b-c$. Sed contra; eſſet $a+b$, maior, quàm $a+c$: & $a+b-c$, maior, quàm a: quod
14. 5. eſt contradictio. Rurſum ſi b, minor eſſet, quàm

c: eſſet

c: eſſet a, minor, quàm $a+b-c$. ſed contra, eſſet $a+b$, minor, quàm $a+c$: & $a+b-c$, minor quàm a: quod eſt contradictio.

7.5. Ergo b, c, ſunt æquales. Ergo $a+b$, ad b,
conſtr. eſt vt $a+b$ ad c: Sed ratio $A+B$ ad rationem
15. h. B, eſt logarithmicè, vt quantitas $a+b$ ad quantitatem c: Ergo etiam eſt logarithmicè, vt $a+b$ ad b: Quod &c.

Quare &c.

Theor. 23. Prop. 23.

SI quemadmodum tota ratio, ad totam, ita logarithmicè fuerit abſciſſa ratio, ad abſciſſam: erit & reſidua, ad reſiduam, ſicut logarithmicè tota ad totam.

Hypoth.

Rationes $A+B$ ad $C+D$, & A ad C, ſunt proportionales logarithmicè.

Dico etiam $A+B$ ad $C+D$, & B ad D, eſſe proportionales logarithmicè.

Demonſtr.

hypoth. Rationes $A+B$ ad $C+D$, & A ad C, ſunt
20. h. proportionales logarithmicè: ergo permutando,
21. h. ſunt proportionales logarithmicè $A+B$ ad A, & $C+D$ ad C: ergo diuidendo, B ad A, &
20. h. D ad C, ſunt proportionales: ergo permutando B ad D, & A ad C, ſunt proportionales: Sed A ad C, & $A+B$ ad $C+D$ ſunt proportionales.

15. *h.* | nales. Ergo *A+B* ad *C+D*, & *B* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 24. *Prop.* 24.

SI ſint tres rationes, atque tres quantitates, quæ binæ, & in eadem ratione logarithmica ſumantur: ex æquo autem prima ratio, quàm tertia, altior fuerit; erit & prima quantitas, quàm tertia, maior: quod ſi prima ratio, fuerit æquealta tertiæ; erit & prima quantitas, æqualis tertiæ: ſin illa depreſſior; hęc quoque minor erit. Et è conuerſo.

Hypoth. commun.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, & tres quantitas *a*, *b*, *c*, binæ, & binæ, ſunt logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *a* ad *b*; *B* ad *C*, vt *b* ad *c*.

Hypoth. 1.

Altior eſt ratio *A*, quàm *C*.

Dico, maiorem eſſe quantitatem *a*, quàm *c*.

Demonſtr.

12. *h.* | Ratio *B* ad *C*, maior eſt logarithmicè, quàm
hypoth. | *B* ad *A*: ſed *b* ad *c* eſt logarithmicè vt *B* ad
def. 8. *h.* |
17. *h.* | *C*: & *B* ad *A*, eſt logarithmicè, vt *b* ad *a*: er-
10. 5. | go *b* ad *c*, maior eſt, quàm *b* ad *a*. Ergo maior eſt *a*, quàm *c*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ ſunt rationes *A*, *C*.

Dico, æquales eſſe quantitates *a*, *c*.

De-

Demonſtr.

11. *h.* *ſup.* 9. 5. | Ratio *B* ad *C*, eſt logarithmicè, vt *B* ad *A*. Ergo *b* ad *c*, eſt vt *b* ad *a*. Ergo æquales ſunt *a*, *c*. Quod &c.

Hypoth. 3.

Depreſſior eſt ratio *A*, quàm *C*.

Dico, minorem eſſe quantitatem *a*, quàm *c*.

Demonſtr.

def.p.h. *ſup.* | Altior eſt, *C*, quàm *A*: ergo maior eſt *c*, quàm *a*: Ergo minor eſt *a*, quàm *c*. Quod &c.

Eodem modo demonſtrabitur è conuerſo: quòd ſi *a* quantitas, maior eſt quantitate *c*: etiam ratio *A*, ratione *C* eſt altior: ſi æqualis; æquealta: ſi minor; depreſſior. Quod. &c.

Quare &c.

Theor. 25. *Prop.* 25.

SI ſint tres rationes, aliæque ipſis æquales numero, quę binæ, & in eadem ratione logarithmica ſumantur: ex æquo autem, prima quàm tertia altior fuerit; erit & quarta, quàm ſexta altior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æquealta; erit & quarta æquealta ſextæ: ſin illa depreſſior; hæc quoque depreſſior erit.

Hypoth. commun.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ, & binæ ſunt logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *D* ad *E*; *B* ad *C*, vt *E* ad *F*.

Hypoth. 1.

Altior eſt ratio *A*, quàm *C*.

Dico altiorem eſſe *D*, quàm *F*.

Demonſt.

12. *b.* | Maior eſt *B*, ad *C*, logarithmicè, quàm *B* ad
hypoth. | *A*. Sed *B* ad *C* eſt logarithmicè, vt *E* ad *F*: &
def. 12. *b* | *B* ad *A*, logarithmicè, vt *E* ad *D*. Ergo maior
17. *b.* | eſt *E* ad *F*, logarithmicè, quàm *E* ad *D*. Ergo
14. *b.* | altior eſt *D*, quàm *F*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ ſunt rationes *A*, *C*.

Dico, æquealtas eſſe rationes *D*, *F*.

Demonſtr.

11. *b.* | Eadem eſt *B* ad *C*, logarithmicè, quæ *B*
ſup. | ad *A*. Ergo eadem eſt *E* ad *F* logarithmicè quæ
13. *b.* | *E* ad *D*. Ergo æquealtæ ſunt rationes *D*, *F*.
| Quod &c.

Hypoth. 3.

Depreſſior eſt *A*, quàm *C*.

Dico, depreſſiorem eſſe *D*, quàm *F*.

Demonſtr.

def p. b. | Altior eſt enim *C*, quàm *A*: ergo altior eſt *F*,
1 *ſup.* | quàm *D*: ergo depreſſior eſt *D*, quàm *F*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 26. *Prop.* 26.

SI ſint tres quantitates, atque tres rationes, quę binæ, & in eadem ratione logarithmica ſumantur; fueritque per-

erturbata earum proportio: ex æquo autem prima quantas, quàm tertia, maior fuerit; erit & prima ratio, quàm ertia, altior. Quod ſi prima tertiæ fuerit æqualis quantias; erit & prima tertiæ, æquealta ratio: ſin illa minor, hęc quoque depreſſior erit. Et è conuerſo.

Hyppth. commun.

Tres quantitates *a*, *b*, *c*, atque trés rationes *A*, *B*, *C*, binę, & binæ, ſunt logarithmicè, proportionales; & earum perturbata eſt proportio: quantitates enim *a* ad *b*, & rationes *B* ad *C*, ſunt logarithmicè proportionales: necnon quantitates *b* ad *c*, & rationes *A* ad *B*, ſunt logarithmicè proportionales.

Hypoth. 1.

Maior eſt *a*, quàm *c*.

Dico altiorem eſſe *A*, quàm *C*.

Demonſtr.

8. 5. Maior eſt *b* ad *c* ratio, quàm *b* ad *a*; Sed
hypoth. *def.* 8. *b.* *b* ad *c*, eſt logarithmicè, vt *A* ad *B*: & *b* ad
17. *b.* *a*, logarithmicè, vt *C* ad *B*. Ergo *A* ad *B*,
14. *b.* maior eſt logarithmicè, quàm *C* ad *B*. Ergo
altior eſt *A*, quàm *C*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquales ſunt *a*, *c*.

Dico æquealtas eſſe *A*, *C*.

Demonſtr.

7. 5. Eadem eſt *b* ad *c*, quæ *b* ad *a*. Ergo eadem
ſup. 13. *b.* eſt logarithmicè *A* ad *B*, quæ *C* ad *B*. Ergo *A*, *C*
ſunt æquealtæ. Quod &c. *Hy-*

Hypoth.3.

Minor eſt *a*, quàm *c*.

Dico depreſſiorem eſſe *A*, quàm *C*.

Demonſtr.

ſup. | Maior eſt *c*, quàm *a*: Ergo altior eſt *C*, quàm
def.2.h. | *A*: ergo depreſſior eſt *A*, quàm *C*. Quod &c.

Eodem modo demonſtrabitur è conuerſo: quòd ſi ratio *A*, ratione *C*, eſt altior; etiam quantitas *a*, quantitate *c*, eſt maior: ſi æquealta; æqualis: ſi depreſſior; minor. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Prop. 27.

SI ſint tres rationes, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione logarithmica ſumantur; fueritque perturbata earum proportio logarithmica: ex ęquo autem prima, quàm tertia altior fuerit; erit & quarta, quàm ſexta, altior. Quòd ſi prima tertiæ fuerit æquealta; erit & quarta æquealta ſextæ: ſin illa depreſſior; hæc quoque depreſſior erit.

Hypoth. commun.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ, & binæ, ſunt logarithmicè proportionales; & earum perturbata eſt proportio: ſunt enim *A* ad *B*, & *E* ad *F*, logarithmicè proportionales: necnon *B* ad *C*, & *D* ad *E*, ſunt proportionales logarithmicè.

Hypoth. 1.

Altior eſt *A*, quàm *C*.

Dico altiorem eſſe *D*, quàm *F*.

Demonſtr.

12. *h.* Maior eſt logarithmicè, *B* ad *C*, quàm *B* ad
hypoth. *A*: ſed *B* ad *C*, eſt vt *D* ad *E*: & *B* ad *A* eſt,
*def.*12. *h* vt *F* ad *E*, logarithmicè: ergo *D* ad *E* maior
17. *h.* eſt logarithmicè, quàm vt *F* ad *E*: Ergo *D* al-
14. *h.* tior eſt, quàm *F*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Æquealtæ ſunt *A*, *C*.

Dico æquealtas eſſe *D*, *F*.

Demonſtr.

11. *h.* Eadem eſt *B* ad *C* logarithmicè, quæ *B* ad
ſup. *A*. Ergo eadem eſt *D* ad *E* logarithmicè, quæ
13. *h.* *F* ad *E*. Ergo *D*, *F* ſunt æquealtæ. Quod &c.

Hypoth. 3.

Depreſſior eſt *A*, quàm *C*.

Dico depreſſiorem eſſe *D*, quàm *F*.

Demonſtr.

def. p.h. Altior eſt *C*, quàm *A*: ergo altior eſt *F*, quàm
ſup. *D*: ergo depreſſior eſt *D*, quàm *F*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 28. *Prop.* 28.

SI ſint quotcunque rationes totidemque quantitates, quæ binæ, in eadem ratione logarithmica ſumantur:

&

& ex æqualitate in eadem erunt ratione logarithmica.

Hypoth.

Sint quotcunque rationes *A*, *B*, *C*, *D*, totidemq; quantitates *a*, *b*, *c*, *d*: binæ, & binæ logarithmicè proportionales: *A* ad *B*, vt *a* ad *b*; *B* ad *C*, vt *b* ad *c*; *C* ad *D*, vt *c* ad *d*.

Dico ex æqualitate, *A* ad *C*, & *a* ad *c*, eſſe logarithmicè proportionales.

Item *A* ad *D*, & *a* ad *d* eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, ſumantur ęquemultiplicata, & multiplex, 3*A*, 3*a*: item rationis, & quantitatis, *B*, *b*, ſumantur, 4*B*, 4*b*: & rationis, & quantitatis, *C*, *c*, ſumantur, 2*C*, 2*c*.

Demonſtr.

hypoth. | Quoniam *A* ad *B*, & *a* ad *b*, ſunt logarithmicè proportionales: ergo 3*A* ad 4*B*, & 3*a* ad 4*b*, ſunt logarithmicè proportionales.
6. h. | Item quoniam *B* ad *C*, & *b* ad *c*, ſunt loga-
hypoth. | rithmicè proportionales: ergo 4*B* ad 2*C*, &
6. h. | 4*b* ad 2*c*, ſunt logarithmicè proportionales. Er-
24. h. | go ex æquali, ſi 3*A* eſt altior, quàm 2*C*; etiam 3*a* eſt maior, quàm 2*c*: ſi æquealta; æqualis: ſi
def. 8. h. | depreſſior; minor. Ergo *A* ad *C*, & *a* ad *c* ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.
hypoth. | Sunt autem *C* ad *D*, & *c* ad *d*, logarithmicè pro-

ſup. | cè proportionales. Ergo *A* ad *D*, & *a* ad *d*, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. Propoſ. 29.

SI ſint quotcunque rationes, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ, & in eadem logarithmica ratione ſumantur: & ex æqualitate, in eadem erunt logarithmica ratione.

Hypoth.

Sint quotcunque rationes, & aliæ totidem, *A*, *B*, *C*, *D*, & *E*, *F*, *G*, *H*: quæ binæ, & in eadem ratione ſumantur: videlicet, *A* ad *B*, & *E* ad *F*: item *B* ad *C*, & *F* ad *G*: necnon *C* ad *D*, & *G* ad *H*.

Dico ex æqualitatę *A* ad *C*, & *E* ad *G*, eſſe logarithmicè, proportionales.

Item *A* ad *D*, & *E* ad *H*, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Rationum *A*, *E*, ſumantur æquemultiplicatæ, 3*A*, 3*E*: item rationum *B*, *F*, æquemultiplicatæ 4*B*, 4*F*: & rationunm *C*, *G*, æquemultiplicatæ 2*C*, 2*G*.

Demonſtr.

hypoth. | Quoniam *A* ad *B*, & *E* ad *F*, ſunt loga-
7. h. | rithmicè proportionales, etiam 3*A* ad 4*B*, & 3*E* ad 4*F*, ſunt logarithmicè proportionales.
hypoth. | item quoniam *B* ad *C*, & *F* ad *G*, ſunt lo-

7. *b.* garithmicè proportionales; etiam 4*B* ad 2*C*, & 4*F* ad 2*G*, ſunt logarithmicè, proportio-
25. *b.* nales. Ergo ſi 3*A* altior eſt quàm 2*C*; etiam 3*E* altior eſt, quàm 2*G*: ſi ęquealta; æquealta: ſi
*def.*12.*b* depreſſior; depreſſior. Ergo *A* ad *C*, & *E* ad *G*, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 30. *Prop.* 30.

SI ſint tres quantitates, totidemque rationes, quæ binæ in eadem ratione logarithmica ſumantur; fuerit autem perturbata earum proportio: & ex æqualitate, in eadem erunt ratione logarithmica.

Hypoth.

Sint tres quantitates *a*, *b*, *c*, totidemque rationes *A*, *B*, *C*, binæ, & binæ logarithmicè proportionales, & earum ſit perturbata proportio: nempe ſint *a* ad *b*, & *B* ad *C*, logarithmicè proportionales: & *b* ad *c*, & *A* ad *B*, logarithmicè proportionales.

Dico, *a* ad *c*, & *A* ad *C*, eſſe logarithmicè proportionales.

Præpar.

Sumantur ipſarum *a*, *b*, quantitatum æquemultiplices 3*a*, 3*b*, & rationis *A*, æquemultiplicata 3*A*. ipſarum quoque rationum *B*, *C*, & quantitatis *c*, ſumantur æquemultiplicatæ rationes 4*B*, 4*C*, & æquemultiplex quantitas 4*c*.

De-

Demonſtr.

hypoth. Quoniam *b* ad *c*, & *A* ad *B*, ſunt logarithmi-
6. h. cè proportionales: etiam 3*b* ad 4*c*, & 3*A* ad
15. 5. 4*B*, ſunt logarithmicè proportionales: ſunt au-
hypoth. tem 3*a* ad 3*b*, ſicut *a* ad *b*: & *a* ad *b*, ſicut lo-
19. h. garithmicè *B* ad *C*: & *B* ad *C* logarithmicè, ſi-
17. h. cut 4*B* ad 4*C*. Ergo 3*a* ad 3*b*, eſt vt 4*B* ad 4*C*.
Sed oſtenſum eſt, 3*b* ad 4*c*, eſſe logarithmicè, vt
26. h. 3*A* ad 4*B*. ergo ex æquali, ſi 3*a* eſt maior, quàm
4*c*; etiam 3*A* eſt altior, quàm 4*C*: ſi æqualis;
def.8.h. æquealta: ſi minor; depreſſior. Ergo *a* ad *c*, eſt
logarithmicè, ſicut *A* ad *C*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 31. Prop. 31.

SI ſint tres rationes, aliæque ipſis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione logarithmica ſumantur, fuerit autem perturbata earum proportio logarithmica: etiam ex æqualitate, in eadem erunt logarithmica ratione.

Hypoth.

Tres rationes *A*, *B*, *C*, aliæque tres *D*, *E*, *F*, binæ ſunt in eadem ratione logarithmica, & earum eſt perturbata proportio logarithmica; ſunt enim *A* ad *B*, & *E* ad *F* logarithmicè proportionales: necnon *B* ad *C*, & *D* ad *E* ſunt logarithmicè proportionales.

Dico, ex æquali, *A* ad *C*, & *D* ad *F*, eſſe logarithmicè proportionales.

 Præ-

Præpar.

Rationum *A*, *B*, *D*, ſumantur æquemultiplicatæ 3*A*, 3*B*, 3*D*: & rationum *C*, *E*, *F*, aliæ ſumantur ęquemultiplicatæ 4*C*, 4*E*, 4*F*.

Demonſtr.

19. *h.* Rationes 3*A* ad 3*B*, & *A* ad *B*, ſunt logari-
hypoth. thmicè proportionales: rationes *A* ad *B*, & *E*
19. *h.* ad *F*, ſunt logarithmicè proportionales: ratio-
nes *E* ad *F*, & 4*E* ad 4*F*, ſunt logarithmicè
17. *h.* proportionales: ergo rationes 3*A* ad 3*B*, & 4*E*
hypoth. ad 4*F*, ſunt logarithmicè proportionales. Et
quoniã *B* ad *C*, & *D* ad *E* rationes, logarithmicè
7. *b.* ſunt proportionales: etiam 3*B* ad 4*C*, & 3*D*
ad 4*E* rationes, logaritmicè ſunt proportiona-
27. *h.* les. Ergo ex æquali, ſi 3*A* eſt altior, quàm 4*C*;
etiam 3*D* eſt altior, quàm 4*F*: ſi ęquealta; ęque-
def. 12. *h* alta: ſi depreſſior; depreſſior. Ergo *A* ad *C*, &
D ad *F* rationes, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 32. Prop. 32.

SI prima ratio ad ſecundam, logarithmicè fuerit, ſicut prima quantitas ad ſecundam; tertia quoque ratio ad ſecundam, logarithmicè fuerit, ſicut tertia quantitas ad ſecundam: etiam compoſita ex prima, & tertia ratione, ad ſecundam, erit logarithmicè, ſicut aggregata quantitas

ex

ex prima, & tertia, ad ſecundam.

Hypoth.

Sint *A*, *B*, *C* rationes, & *a*, *b*, *c*, quantitates: & ſit *A* ad *B* logarithmicè, ſicut *a* ad *b*: item *C* ad *B* logarithmicè, ſicut *c* ad *b*.

Dico *A*+*C* ad *B*, eſſe logarithmicè, ſicut *a*+*c* ad *b*.

Demonſtr.

hypoth. | Quoniam *C* ad *B*, eſt logarithmicè, ſicut *c* ad
def.8.h. | *b*: conuertẽdo, *B* ad *C*, eſt logarithmicè, ſicut *b*
hypoth. | ad *c*: Sed *A* ad *B*, eſt logarithmicè, ſicut *a* ad *b*:
28. h. | ergo ex ęquali *A* ad *C*, eſt logarithmicè, ſicut *a* ad
22. h. | *c*: ergo componendo *A*+*C* ad *C*, eſt logarithmi-
hypoth. | cè, ſicut *a*+*c* ad *c*. Sed *C* ad *B* eſt logarithmicè,
28. h. | ſicut *c* ad *b*: ergo ex æquali *A*+*C* ad *B* eſt lo-
garithmicè ſicut *a*+*c* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. Prop. 33.

SI prima ratio ad ſecundam, eadem logarithmicè fuerit, quæ tertia ad quartam; fuerit autem, & quinta ad ſecundam, eadem logarithmicè, quæ ſexta ad quartam: erit & compoſita prima cum quinta ad ſecundam, eadem quæ compoſita tertia cum ſexta ad quartam.

Hypoth.

Rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D*, ſunt proportionales: item *E* ad *B*, & *F* ad *D*, ſunt proportionales.

Dico *A*+*E* ad *B*, & *C*+*F* ad *D*, eſſe proportionales.

De-

Demonſtr.

hypoth. Quoniam *E* ad *B*, & *F* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales: conuertendo *B* ad *E*, & *D* ad *F*, ſunt logarithmicè proportionales:
def.12.h
hypoth. ſed *A* ad *B*, & *C* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales: Ergo ex æquali *A* ad *E*, & *C*
29. h.
22. h. ad *F*; ſunt logarithmicè proportionales: ergo componendo *A+E* ad *E*, & *C+F* ad *F*, ſunt logarithmicè proportionales. Sed *E* ad *B*, &
hypoth.
29. h. *F* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales. Ergo *A+E* ad *B*, & *C+F* ad *D*, ſunt logarithmicè proportionales. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. *Prop.* 34.

SI rationes quatuor fuerint logarithmicè proportionales: compoſita ex duabus, altiore omnium, & depreſſiore omnium, altior eſt, quàm compoſita ex reliquis duabus.

Hypoth.

Sint rationes *A* ad *B*, & *C* ad *D* logarithmicè proportionales: Et eſto *A* altior, quàm *B*, necnon altior quàm *C*. Et quoniam *A* altior eſt, quàm *C*: ergo *B* altior eſt, quàm *D*. Ergo *A* altior eſt omnium; & *D* depreſſior omnium.

Dico rationem *A+D*, altiorem eſſe ratione *B+C*.

Præ-

Præpar.

Quoniam A altior eſt, quàm B: ſumatur E ratio quacum compoſita B, facit rationem A: vt ita ratio A ſit eadem, quę $B+E$. Item quoniam C altior eſt, quàm D: ſumatur F ratio, quacum compoſita D, facit rationem C: vt ita ratio C, ſit eadem, quæ $D+F$.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam A ad B, & C ad D, ſunt loga-
conſtr. rithmicè proportionales: & eſt A, eadem, quæ
11. *h.* $B+E$: & C, eadẽ, quæ $D+F$. ergo $B+E$ ad B,
& $D+F$ ad D, ſunt logarithmicè proportiona-
21. *h.* les: ergo diuidendo, E ad B, & F ad D, ſunt
hypoth. logarithmicè proportionales. Sed B altior eſt,
18. *h.* quàm D: ergo E altior eſt, quàm F: compo-
4. 3. ſitiſque communiter B, & D rationibus; ergo
conſtr. $B+E+D$ ratio, altior eſt, quàm $B+D+F$. Sed
$B+E$, ratio eadem eſt, quæ A: & $D+F$, ea-
dem quæ C: ergo $A+D$ altior eſt, quàm
$B+C$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 35. *Prop.* 35.

RAtiones proportionales, per conuerſionem rationis, ſunt proportionales.

Hypoth.

Rationes A ad B, & C ad D ſunt logarithmicè proportionales: & eſt A altior, quàm B: ideoque etiam C,

altior

altior eſt, quàm *D*.

Dico *A* ad *A*---*B*, eſſe logarithmicè, ſicut *C* ad *C*---*D*.

Demonſtr.

hypoth.	*A*; *B*: *C*; *D*.
21. *h.*	*A*---*B*; *B*: *C*---*D*; *D*.
*def.*12.*h*	*B*; *A*; *D*; *C*.
29. *h.*	*A*---*B*; *A*: *C*---*D*; *C*.
*def.*12.*h*	*A*; *A*---*B*: *C*; *C*---*D*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 36. Prop. 36.

RAtiones logarithmicè proportionales, per homologiam ſunt logarithmicè proportionales.

Demonſtr.

*def.*12.*h* Nam conuertendo, rationes fiunt proportio-
23. *h.* nales: item homologas depreſſiores ab homologis
22. *h.* altioribus decomponendo: & adcomponendo; &
35. *h.* per conuerſionem rationis: & diuidendo: & ęque-
21. *h.* multiplicando, & æqueſubmultiplicando: & per-
19. *h.* mutando: & colligendo: & ex æquali in propor-
20. *h.* tione logarithmica ordinata: coniunctiſque omni-
16. *h.* fariam argumentis huiuſmodi, quocunque ordi-
28. *h.* ne, per homologiam, logarithmicè proportiona-
les fiunt. Quod &c.

Quare &c.

Petrus

Petrus Mengolus, Io. Galeatio Manzio, iuueni ſtudioſiſſimo. S. D.

QVintum hoc elementum, de nouis, & naturalibus logarithmis, cuiuſque rationis inſeparabiliter proprijs, quocum communicarem, neminem in mea, aut cuiuſquam alterius Mathematici ſchola, ſatis noui diſpoſitum, præter te, omnium bonarum artium, & in primis Mathematicarum ſtudioſiſsimum. Et hæc profectò inſignis fælicitas, incomparabili virtuti acceſsit, & meritis Excellentiſsimi præceptoris tui Caſsini: quòd te, tùm frequentem in Muſæo auditorem, tùm in ſuis Aſtronomicis, & Aquaticis laboribus, comitem indiuiduum, & ſolertem nactus fuerit adiutorem. Itaque cum tuam mihi conſuetudinem, rariùs hoc anno, quàm ante conſueueras, offerres; mandaui, meum tui deſiderium, tibi ſignificari: vt meorum etiam ſtudiorum particeps fieres, & conſultor. Gratiam liberaliter feciſti, quàm volebam: meque domi aliquoties conueniſti, huiu-

ſce opuſculi partem hanc ſcriptitantem. Et ex me, tùm definitiones præcedentium elementorum, & rationes nominum, & propriam cuiuſque vtilitatem elementi, necnon quaſdam nobiliores demonſtrationes audiſti ſparſim; tùm vel maximè numeroſam methodum: qua hyperlogarithmorum, & hypologarithmorum, & logarithmorum rationes mihi contigit inuenire. tuque inuenti ſubtilitatem laudaſti, quòd mihi Deus liberaliter tribuit: atque vtilitatem trigonometricam, ad faciliorem logarithmici canonis conſtructionem, optimè præuidiſti. Ex laude tua, plurimum profeciſſe me fateor: nam alacrior factus, & ex tecum communicatione vegetior, multarum concluſionum, quas prænoui euidentiſsimis arithmeticis artificijs, quæ mihi ſupererant demonſtrandæ, media lemmata reperire cæpi, longè fæliciùs. Libellum igitur hucuſque non ſine tuo adminiculo perfectum, offero: vt ſermones indemonſtratos, quos inuicem habebamus, per te ipſum legendo poſsis complere. Vale. meque, & labores meos, inprimis Excellentiſsimo Caſsino, deinde alijs tuis conſcholaribus, & amicis, vt commendes, rogo.

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ
ELEMENTVM QVINTVM.
DEFINITIONES.

1 DIfferentia duarum quantitatum, quando prima ſuperat ſecundam, dicetur, Exceſſus primæ & ſecundæ.

2 Quando verò prima ſuperatur à ſecunda, dicetur, Defectus primæ, & ſecundæ.

3. Similes differentiæ dicentur, exceſſus exceſſibus, & defectus defectibus.

4. Diſſimiles verò, exceſſus defectibus.

5. Quatuor quantitates, dicentur, Arithmeticè diſpoſitæ; cum primæ & ſecundæ, tertiæ & quartæ, fuerint ſimiles, & æquales differentiæ.

6. Inuerſio Arithmetica, dicetur; cum quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, prima & ſecunda, tertia & quarta, rurſum diſponentur arithmeticè, ſecunda & prima, quarta & tertia.

7. Permutatio Arithmetica, dicetur: cum quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, prima & ſecunda, tertia & quarta, rurſum diſponenter arithmeticè, prima & tertia, ſecunda & quarta.

8. Si fuerint aliquot quantitates, atque aliæ totidem, & fuerint prima & ſecunda primarum, item prima & ſecunda ſecundarum, diſpoſitæ arithmeticè; fuerint quoque ſecunda & tertia primarum, item ſecunda & tertia ſecundarum, arithmeticè diſpoſitæ; & ſic deinceps vſque ad vltimas: dicentur primæ ſimiliter eſſe diſpoſitæ arithmeticè, atque ſecundę.

9. Quòd ſi prima & vltima primarum, item prima & vltima ſecundarum, fuerint arithmeticè diſpoſitæ; dicentur, ita diſpoſitæ, ex æqualitate arithmetica.

10. Tres quantitates, dicentur, arithmeticè ordinatę; cum primæ & ſecundæ, ſecundæ & tertiæ, ſimiles, & ęquales fuerint differentiæ.

11. Plures quantitates, dicentur, arithmeticè ordinatæ; cum ternæ deinceps fuerint arithmeticè ordinatę: ideſt, cum primæ & ſecundæ, ſecundæ & tertiæ, tertiæ & quartæ, & deinceps vſque ad vltimam, ſimiles, & æquales fuerint differentiæ.

12. Series naturalis arithmetica, dicetur; cuius ordinatarum arithmeticè quantitatum prima, dimidia eſt ſecundæ.

13. Quatuor quantitates, dicentur, Harmonicè diſpoſitæ, cum differentia primæ & ſecundæ, ad ſimilem differen-

rentiam tertiæ & quartæ, rationem compoſitam habuerit ex rationibus, primæ ad tertiam, & ſecundæ ad quartam.

14. Inuerſio Harmonica, dicetur; cùm quatuor quantitates harmonicè diſpoſitæ, prima & ſecunda, tertia & quarta, rurſum diſponentur harmonicè, ſecunda & prima, quarta & tertia.

15. Permutatio Harmonica, dicetur, cùm quatuor quantitates harmonicè diſpoſitæ, prima & ſecunda, tertia & quarta, rurſum diſponentur harmonicè, prima & tertia, ſecunda & quarta.

16. Si fuerint aliquot quantitates, atque aliæ totidem; & fuerint prima & ſecunda primarum, item prima & ſecunda ſecundarum, diſpoſitæ harmonicè; fuerint quoque ſecunda & tertia primarum, item ſecunda & tertia ſecundarum, diſpoſitę harmonicè; & ſic deinceps vſque ad vltimas: dicentur primæ ſimiliter eſſe diſpoſitæ harmonicè, atque ſecundæ.

17. Quòd ſi prima & vltima primarum, item prima & vltima ſecundarum, fuerint harmonicè diſpoſitę; dicentur, ita diſpoſitæ, ex æqualitate harmonica.

18. Tres quantitates, dicentur, harmonicè ordinatę; cum primæ & ſecundæ differentia, ad ſimilem differentiam ſecundæ & tertiæ, fuerit ſicut prima, quantitas ad tertiam.

19. Plures quantitates dicentur harmonicè ordinatæ, cum ternæ deinceps fuerint harmonicè ordinatæ: ideſt cum primæ & ſecundæ differentia, ad ſimilem differentiam ſecundæ & tertiæ, fuerit vt prima ad tertiam; differentia

quo-

quoque ſecundæ & tertiæ, ad ſimilem differentiam tertiæ & quartæ, fuerit ſicut ſecunda ad quartam; & ſic deinceps vſque ad vltimam.

20. Series naturalis harmonica, dicetur, cuius ordinatarum harmonicè quantitatum prima, dupla eſt ſecundę.

21. Si à rationali, ſeries harmonica naturalis fuerit ordinata; & à quotoquouis ordinatorum terminorum quotcunque fuerint deinceps aſſumpti, & aggregati: ſumma, dicetur, Prologarithmus.

22. Porrò prologarithmus, dicetur Hyperlogarithmus earum rationum, quas habent inuicem, primus aſſumptus terminus, & proximus vlterior vltimo, non aſſumptus.

23. Et earum rationum Hypologarithmus, dicetur, quas habent inuicem, vltimus aſſumptus terminus, & proximus prior primo, non aſſumptus.

24. Quantitas omni minor hyperlogarithmo earumdem rationum, & omni maior hypologarithmo, earumdem Logarithmus, dicetur.

25. Ex totenis deinceps Prologarithmorum ſeries, dicetur: in qua, ex prioribus, dicetur, Primus; ex totidem immediatè ſequentibus, Secundus; ex alijs deinceps totidem, Tertius Prologarithmus; & ſic deinceps reliqui. Vt prologarithmorum, ex ternis à ſecundo, dicetur, Primus, qui ex ſecundo, tertio, & quarto fit collectis; Secundus, qui ex quinto, ſexto, & ſeptimo; Tertius, qui ex octauo, nono, & decimo; & ita deinceps.

26. Si

26. Si duo prologarithmi, ex inæqualibus multitudine terminis collecti fuerint; & cuius maior eſt multitudo terminorum, eius termini ſinguli, per alteram multitudinem fuerint æqualiter diuiſi: ſiquidem factæ partes ordinatim ſumptæ maiorum primùm terminorum, deinde minorum, & collectæ totenæ, quota eſt ſua maior multitudo terminorum, maiores fuerint ſingulis terminis alterius prologarithmi: maior profectò prologarithmus erit, ex maioribus partibus; & dicetur, Perſpèctè maior.

27. Si verò factæ partes totenæ, minores fuerint ſingulis: erit profectò minor prologarithmus, ex minoribus partibus; & dicetur Perſpectè minor.

28. Si quatuor proportionalium, rationalis fuerit prima: quarta, dicetur, Productus ſecundæ & tertiæ. Et ſignificabitur charactere, ex vtriſque ſecundæ, ac tertiæ characteribus deinceps conſcriptis compoſito. vtpote ad quam, rationalis habet rationem compoſitam ex rationibus ad tertiam, & ad ſecundam. Exempli gratiam. *u* ad *a*, eſt vt *b* ad *ab*. Item. *u* ad *ab*, eſt vt *c* ad *abc*.

29. Si verò quatuor proportionalium, rationalis fuerit ſecunda: quarta, dicetur, Fractio. & ſignificabitur charactere tertiæ, ante characterem primæ ſcripto, & patrentheſes clauſo. Exempli gratia *a* ad *u* eſt vt *b* ad *b* (*a*). Item. *ab* ad *u* eſt vt *c* ad *c* (*ab*). Et *c* ad *u*, eſt vt *ab* ad *ab* (*c*).

30. Tertia autem, dicetur; Numerator fractionis: cuius character, ſcribetur ſupra lineolam. vt in charactere

fra-

fractionis, *b* (*a*), numerator eſt *b*.

31. Et prima, dicetur, Denominator fractionis: cuius character, ſcribetur infra lineolam. vt in charactere fractionis *b* (*a*), denominator eſt *a*.

32. Numeroſa ratio dicetur, cui eandem habet numerus ad numerum.

33. Non numeroſa ratio dicetur, cui nulla numeroſa eſt eadem.

34. Non numeroſæ rationis logarithmus, dicetur, quantitas, minor omni logarithmo altioris numeroſæ rationis, & maior omni logarithmo depreſſioris.



Theor-

Theorema prima Propoſitio prima.

SI trium inæqualium quantitatum, minima, non eſt minor, quàm ſecunda poteſtas differentię extremarum: ipſa differentia extremarum, minor eſt, ad rationalem, quàm vt minima, ad defectum minimæ, & mediæ.

Hypoth.

Sunto tres inæquales quantitates *a*, *a+b*, *a+b+c*: & eſto *a*, non minor, quàm *b2+2bc+c2*.

Dico *b+c*; *u*: minorem eſſe, quàm *a*; *b*.

Demonſt.

hypoth.	*b2+2bc+c2* : non maior, quàm *a*.
8.5.	*b2+2bc+c2*; *b+c*: non maior, quàm *a*; *b+c*.
8. *p*.	*b2+2bc+c2*; *b+c*: *b+c*; *u*.
13.5.	*b+c*; *u*: non maior, quàm *a*; *b+c*.
8.5.	*a*; *b+c*: minor, quàm *a*; *b*.
13.5.	*b+c*; *u*: minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 2. Prop. 2.

CVm trium inæqualium numerorum, minimus, non eſt minor, quàm ſecunda poteſtas differentię extremorum; ſi defectus medij & maximi denominetur à minimo; defectus verò minimi & medij auctus vnitate denominetur à maximo: fiunt duæ Fractiones; quarum ſumma, minor eſt, quàm differentia extremorum, vnitate aucta, denominata à medio.

Hypoth.

Sunto tres inæquales numeri *a*, *a+b*, *a+b+c*: & eſto *a*, non minor, quàm *b2+2bc+c2*.

Dico *c* (*a*), *+b+u* (*a+b+c*): minorem eſſe, quàm *b+c+u* (*a+b*).

Demonſtr.

p. h.	*b+c*; *u*: minor eſt, quàm *a*; *b*.
p. 3.	*b+c+u*; *u*: minor, quàm *a+b*; *b*.
3. 3.	*b+c+u*; *b+c*: maior, quàm *a+b*; *a*.

Itaque *per* 19. 7. productus *b+c*, per *a+b*: minor eſt quàm productus *b+c+u*, per *a*.

Additoque communi producto *a*, per *a+b*. productus *b+c+a*, per *a+b*: minor, quàm ſumma productorum *b+c+u*, per *a*; & *a+b*, per *a*.

Et communiter multiplicando per *c*: productus *b+c+a*, per *a+b*, per *c*: minor, quàm ſumma productorum *b+c+u*, per *a*, per *c*; & *a+b*, per *a*, per *c*.

Additoque communi producto *a*, per *b+u*, per *a+b*. ſumma productorum *b+c+a*, per *a+b*, per *c*; & *a*, per *b+u*, per *a+b*: minor, quàm productus *a*, per *a+b+c*, per *b+c+u*.

Et communiter diuidendo, per *a*, per *a+b+c*, per *a+b*. *c* (*a*), *+b+u* (*a+b+c*): minor, quàm *b+c+u* (*a+b*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 3.

SI trium inæqualium numerorum, defectus medij & maximi, auctus vnitate, denominetur à minimo; defectus verò minimi & medij denominetur à maximo: fiunt duæ fractiones; quarum ſumma eſt maior, quàm differentia extremorum, vnitate aucta, denominata à medio.

Hypoth.

Sunto tres inæquales numeri, *a*, *a+b*, *a+b+c*.

Dico *c+u* (*a*)+*b* (*a+b+c*): maiorem eſſe, quàm *b+c+u* (*a+b*).

Demonſtr.

Productus *c+u*, per *a+b+c*, per *b*: maior eſt producto *a*, per *c*, per *b*.

Additoque communi producto *a*, per *b*, per *a+b*. ſumma productorum *c+u*, per *a+b+c*, per *b*; & *a*, per *b*, per *a+b*: maior eſt, quàm productus *a*, per *b*, per *a+b+c*.

Additoque communi producto *c+u*, per *a+b+c*, per *a*. ſumma productorum *c+u*, per *a+b+c*, per *a+b*; & *a*, per *b*, per *a+b*: maior eſt quàm productus *a*, per *b+c+u*, per *a+b+c*.

Et communiter diuidendo, per *a*, per *a+b+c*, per *a+b*. *c+u* (*a*)+*b* (*a+b+c*): maior eſt, quàm *b+c+u* (*a+b*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 4. *Prop.* 4.

QVatuor termini arithmeticè diſpoſiti, permutando, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

Hypoth.

Quatuor termini *a*, *a*+*b*, *c*, *c*+*b*, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

Dico permutando *a*, *c*, *a*+*b*, *c*+*b* eſſe arithmeticè diſpoſitos.

Demonſtr.

def.5.h. Siquidem *a*, maior eſt, quàm *c*; tantumdem *a*+*b*, maior eſt, quàm *c*+*b*: ſi minor, minor. Ergo *a*, *c*, *a*+*b*, *c*+*b*, ſunt arithmeticè diſpoſiti. Quod &c. Quare &c.

Theor. 5. *Prop.* 5.

SI fuerint aliquot quantitates, in vna ſerie, ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque totidem, in altera: erunt ex æqualitate arithmetica, prima & vltima, in vna ſerie, item prima & vltima, in altera, diſpoſitæ arithmeticè.

Hypoth.

Sint *a*, *b*, *c*, ſimiliter diſpoſitæ arithmeticè, atque aliæ totidem *d*, *e*, *f*.

Dico ex ęqualitate arithmetica, eſſe diſpoſitas arithmeticè, *a*, *c*, & *d*, *f*.

Demonſtr.

def.8.h. Sunt enim *a*, *b*, *d*, *e*, arithmeticè diſpoſitę:
4. h. ergo permutando *a*, *d*, *b*, *e*, ſunt atithmeticè
def.5.h. diſpoſitę: ergo differentia *a*, *d*, differentię *b*, *e*,

ſimilis

ſimilis eſt, & æqualis. Similiter oſtendetur differentia b, e, differentiæ c, f, ſimilis, & æqualis: ergo differentia a, d, differentiæ, c, f, ſimilis

def. 5. h. eſt, & æqualis: ergo a, d, c, f, ſunt arithmeticè

4. h. diſpoſitæ: ergo permutando, a, c, d, f, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 6. Prop. 6.

ARithmeticè diſpoſitarum ęquemultiplices, ſunt arithmeticè diſpoſitæ.

Hypoth.

Sint arithmeticè diſpoſitæ a, $a+b$, c, $c+b$. quorum æquemultiplices $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3d$.

Dico $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3b$, eſſe diſpoſitas arithmeticè.

Demonſtr.

19. 5. Differentia $3a$, $3a+3b$, ad differentiam a, $a+b$, æquemultiplex eſt, atque $3a$ ad a: ſed $3a$

19. 5. ad a, æquemultiplex eſt, atque $3c$ ad c: & $3c$ ad c, æquemultiplex: atque $3c+3b$ ad $c+b$: ergo differentia $3a$, $3a+3b$, ad differentiam a, $a+b$, æquemultiplex eſt, atque differentia $3c$, $3c$

def. 5. h. $+3b$ ad differentiam c, $c+b$. Sed differentia a, $a+b$, æqualis eſt differentiæ c, $c+b$: ergo differentia $3a$, $3a+3b$, æqualis eſt differentiæ $3c$, $3c+3b$.

Rur-

17. 7. Rurſum differentia $3a$, $3a+3b$, ſimilis eſt differentiæ a, $a+b$: & differentia a, $a+b$ ſimilis dif-
def. 5. b. ferentiæ c, $c+b$: & differentia c, $c+b$ ſimilis dif-
17. 7. ferentiæ $3c$, $3c+3b$: Ergo differentia $3a$, $3a+3b$, ſimilis eſt, & æqualis differentię $3c$; $3c+3b$:
def. 5. b. Ergo $3a$, $3a+3b$, $3c$, $3c+3b$, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 7. Prop. 7.

IN ſerie arithmetica naturali, aliquoteni ab vno, & aliquoteni ab altero, per numeros alterutrorum multitudinis terminorum multiplicati; ſicut primi producti, ſimiliter ſecundi, ſunt arithmeticè diſpoſiti: item tertij, & quarti, & ſic deinceps.

Hypoth.

a, $a+1$, $a+2$. $a+3$, $a+4$; $a+5$.
b, $b+1$, $b+2$, $b+3$. $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.
$4a$, $4a+4$, $4a+8$. $4a+12$, $4a+16$, $4a+20$.
$3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$. $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$,

Sint in ſerie arithmetica naturali duo termini, a, b: & ſint ab a, terni; & ternorum primi a, $a+1$, $a+2$; ſecundi $a+3$, $c+4$, $a+5$: & à b, ſint quaterni; & quaternorum primi b, $b+1$, $b+2$, $b+3$; ſecundi, $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.

Quoniam in ſerie arithmetica naturali proximorum differentiæ, ſunt vnitates: ergo alternorum, ſunt binarij; tertiorum, ternarij; quartorum, quaternarij; & ſic deinceps.

ceps. Sunt autem primus primorum ex ternis, & primus ſecundorum, ab inuicem tertij: & primus primorum ex quaternis, & primus ſecundorum, ab inuicem quarti: ergo differentia a, $a+3$, eſt ternarius 3; & differentia b, $b+4$, & quaternarius 4. Multiplicentur itaque terni, per 4: & quaterni, per 3: & fiant multiplices terni, & quaterni primi; item terni, & quaterni ſecundi.

Dico multiplices primorum $4a+8$, $4a+4$, $4a$, $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, eſſe ſimiliter arithmeticè diſpoſitos, atque ſecundorum, $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$.

Demonſtr.

hypoth. Termini $a+2$, $a+1$, a, ſunt deinceps in ſeriè arithmetica naturali, in qua ſunt etiam ter-
def.6.h. mini $a+5$, $a+4$, $a+3$. Ergo $a+2$, $a+1$, a, ſunt ſimiliter arithmeticè ordinati, atque $a+5$,
6.h. $a+4$, $a+3$: & eorum æquemultiplices $4a+8$, $4a+4$, $4a$, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$.

ſup. Defectus ſimplicium a, $a+3$, eſt ternarius:
5.5. ergo earumdem quadruplicium defectus $4a$, $4a+12$, eſt productus 3, per 4. Item defectus ſimplicium b, $b+4$, eſt quaternarius: ergo earumdem triplicium defectus $3b$, $3b+12$, eſt
14.7. productus 4 per 3. Sed productus 3 per 4, eſt æqualis producto per 3. ergo defectus $4a$,
def.5.h. $4a+12$, æqualis eſt defectui $3b$, $3b+12$. Ergo $4a$, $4a+12$, $3b$, $3b+12$, ſunt arithmeticè

a, $a+1$, $a+2$. $a+3$, $a+4$, $a+5$.
b, $b+1$, $b+2$, $b+3$. $b+4$, $b+5$, $b+6$, $b+7$.
$4a$, $4a+4$, $4a+8$. $4a+12$, $4a+16$, $4a+20$.
$3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$. $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$.

4. *b.* cè diſpoſiti. Ergo permutando $4a$, $3b$, $4a+12$,
5. *b.* $3b+12$, ſunt arithmeticè diſpoſiti. Ergo ex ęqua-
def.8.b. litate arithmetica, $4a+8$, $4a+4$, $4a$, $3b$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$.

Oſtendetur autem ſimiliter vt ſupra, quod $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$,
5. *b.* $3b+21$. Ergo ex ęqualitate arithmetica $4a+8$,
def.8.b. $4a+4$, $4a$, $3b$, $3b+3$, $3b+6$, $3b+9$, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque $4a+20$, $4a+16$, $4a+12$, $3b+12$, $3b+15$, $3b+18$, $3b+21$. Quod &c.

Quare primi terni ab a, & quaterni à b, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque ſecundi. Et eadem demonſtratione oſtendemus, tum ſecundos, tum primos, eſſe ſimiliter arithmeticè diſpoſitos, atque tertios, & atque quartos, & ſic deinceps.

Theor. 8. *Prop.* 8.

PRoducti, compoſitam habent rationem producentium.

Hy-

Hypoth.

Eſto quantitatum *a, b,* productus *ab;* & quantitatum *c, d,* productus *cd.*

Dico *ab; cd: a; c, + b; d.*

Demonſtr.

def 28b	*ab; u: a; u, + b; u.*
def. 28b	*u; cd: u; c, + u; d.*
p. p.	*ab; cd: a; c, + b; d.* Quod &c.

Quare &c.

Theor. 9. Prop. 9.

PRoducti communem habentes producentem, ſunt vt producentes non communes.

Hypoth.

Eſto quantitatum *a, b,* productus *ab;* & quantitatum *a, c,* productus *ac.*

Dico *ab; ac: b; c.*

Demonſtr.

8. h.	*ab; ac: b; a, + a; c.*
def. 5. 6.	*b; a, + a; c: b; c.*
p. p.	*ab; ac: b; c.* Quod &c.

Quare &c.

Theor. 10. Propoſ. 10.

FRactiones eumdem habentes denominatorem, ſunt inter ſe, vt numeratores.

Hypoth.

Fractionum communis denominator eſto *a*: ſunto numeratores *b*, *c*.

Dico *b* (*a*); *c* (*a*): *b*; *c*.

Demonſtr.

def.29b	*a*; *u*: *b*; *b* (*a*).
def.29b	*a*; *u*: *c*; *c* (*a*),
11. 5.	*b*; *b* (*a*): *c*; *c* (*a*).
2. *p*.	*b* (*a*); *c* (*a*): *b*; *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 11. *Prop.* 11.

QVatuor proportionalium quarta eſt fractio, in qua numerator eſt productus ſecundæ & tertiæ, denominator eſt prima.

Hypoth.

Sunto proportionales prima *a*, ſecunda *b*, tertia *c*.

Dico *a*; *b*: *c*; *cb* (*a*).

Demonſtr.

def.29b	*a*; *u*: *c*; *c* (*a*).
def.28b	*u*; *b*: *c*; *cb*
10. *b*.	*c*; *cb*: *c* (*a*); *cb* (*a*).
11. 5.	*u*; *b*: *c* (*a*); *cb* (*a*).
p. *p*.	*a*; *b*: *c*; *cb* (*a*). Quod &c. Quare &c.

Theor. 12. *Prop.* 12.

FRactiones, quarum numeratores æquales, reciprocè ſunt, vt denominatores. *Hy-*

Hypoth.

Eſto fractionum numerator communis *a*: & ſunto denominatores *b*, *c*.

Dico *b*; *c*: *a* (*c*); *a* (*b*).

Demonſtr.

def.29b	*b*; *u*: *a*; *a* (*b*).
def.29b	*c*; *u*: *a*; *a* (*c*).
def.6.5.	*u*; *c*: *a* (*c*); *a*.
p. p.	*b*; *c*: *a* (*c*); *a* (*b*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. Prop. 13.

DVorum productorum, quorum producentes partim communes, partim ſunt non communes, primo alterum denominante, fit eadem fractio; quæ, non communium producentium, primo alterum denominante.

Hypoth.

Sunto producti *a b c*, *d b c*: quorum communis producens, *b c*; non communes, *a*, *d*. Et denominante *a b c*, numeratorem *d b c*; necnon denominante *a*, numeratorem *b*, fiant fractiones *d b c* (*a b c*), *d* (*a*).

Dico *d b c* (*a b c*): *d* (*a*).

Demonſtr.

def.29b	*a b c*; *u*: *d b c*; *d b c* (*a b c*).
2. p.	*a b c*; *d b c*: *u*; *d b c* (*a b c*).
9. b.	*a*; *d*: *a b c*; *d b c*.
11. 5.	*a*; *d*: *u*; *d b c* (*a b c*).

2. p. | a; u: d; dbc (abc).
def.29h | a; u: d; d (a).
9. 5. | dbc (abc): d (a). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 13. *Prop.* 13.

FRactiones, quarum numeratores æquales,& denominatores arithmeticè diſpoſiti, ſunt harmonicè diſpoſitæ.

Hypoth.

Eſto quatuor fractionum numerator communis *a*, & ſunto denominatores arithmeticè diſpoſiti *b*, *c*, *d*, *e*.

Dico *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), *a* (*e*) eſſe harmonicè diſpoſitas.

Demonſtr.

12. *b.* | Si differentia *b*, *c*, eſt defectus: ergo reciprocè differentia *a* (*b*), *a* (*c*), eſt exceſſus: & eſt differentia *d*, *e*, defectus: & reciprocè differentia *a* (*d*), *a* (*e*) eſt exceſſus. Quod ſi differentia *b*, *c*, eſt exceſſus: etiam differentia *d*, *e*, eſt exceſſus: & differentia *a* (*b*), *a* (*c*), reciprocè eſt defectus: necnon differentia *a* (*d*), *a* (*e*), eſt defectus. Quare factionum *a* (*b*), *a* (*c*), & *a* (*d*), *a* (*e*), ſimiles ſunt differentiæ. Eſto differentia *b*, *c*, defectus. Ergo differentia *a* (*b*), *a* (*c*) eſt exceſſus: item differentia *a* (*d*), *a* (*e*).
hypoth. | *c*--- *b*: *e* --- *d*.

pro-

	producendo per *ade*, & *abc*.
9. *b*.	*acde—abde*; *abce—abcd*: *ade*; *abc*: *de*; *bc*. denominando communiter per *bcde*.
13. *b*.	*a* (*b*)---*a* (*c*); *a* (*d*)—*a* (*e*): *de*; *bc*.
8. *b*.	*de*; *bc*: *d*; *b*,+*e*; *c*.
12. *b*.	*d*; *b*: *a* (*b*); *a* (*d*).
12. *b*.	*e*; *c*: *a* (*c*); *a* (*e*).
p. *p*.	*de*; *bc*: *a* (*b*); *a* (*d*), +*a* (*c*); *a* (*e*).
11. 5.	*a* (*b*)—*a* (*c*); *a* (*d*)---*a* (*e*): *a* (*b*); *a* (*d*), +*a* (*c*); *a* (*e*).
def.13.*b*	*a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), *a* (*e*) ſunt harmonicè diſpoſitæ. Quod &c.
	Similiter oſtendetur, ſi differentia *b*, *c*, eſt exceſſus.

Quare &c.

Theor. 15. *Prop.* 15.

FRactiones, quarum numeratores æquales, & denominatores arithmeticè ordinati, ſunt harmonicæ ordinatæ.

Hypoth.

Eſto fractionum numerator communis *a*: & ſunto denominatores arithmeticè ordinati, *b*, *c*, *d*, *e*.

Dico *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), *a* (*e*) eſſe harmonicè ordinatas.

Demonſtr.

hypoth.	*b*, *c*, *d*, ſunt arithmeticè ordinati.

b, *c*,

def.5.h. | *b*, *c*, *c*, *d*, ſunt arithmeticè diſpoſiti.

14. h. | *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*c*), *a* (*d*), ſunt harmonicè diſpoſitæ.

Differentia *a* (*b*), *a* (*c*), ad ſimilem diffe-
def.13 h | rentiam *a* (*c*), *a* (*d*), rationem habet compo-
def.5.6. | ſitam ex rationibus, *a* (*b*) ad *a* (*c*), & *a* (*c*) ad *a* (*d*): ideſt eamdem, quàm habet *a* (*b*) ad *a* (*d*).

def.18h | *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), ſunt harmonicè ordinatæ.

ſup. | *a* (*c*), *a* (*d*), *a* (*e*), ſunt harmonicè ordinatę.

def.19h | *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), *a* (*e*), ſunt harmonicè ordinatæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 16. Prop. 16.

SI aliquot fractiones, aliæque totidem, communem habentes numeratorem, denominatores habuerint ſimiliter arithmeticè diſpoſitos, erunt & ipſæ ſimiliter harmonicè diſpoſitæ.

Hypoth.

Sunto tres fractiones, aliæque tres, quarum communis numerator *a*: ſint autem denominatores *b*, *c*, *d*, ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque denominatores *e*, *f*, *g*.

Dico *a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), ſimiliter harmonicè diſpoſitas eſſe, atque *a* (*e*), *a* (*f*), *a* (*g*).

Demonſtr.

hypoth. | *b*, *c*, *d*, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſiti, atque *e*, *f*, *g*.

b, *c*, *e*,

def.8.h.	*b*, *c*, *e*, *f*, ſunt arithmeticè diſpoſiti.
	c, *d*, *f*, *g*, ſunt arithmeticè diſpoſiti.
14. *h.*	*a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*e*), *a* (*f*), ſunt harmonicè diſpoſitæ.
	a (*c*), *a* (*d*), *a* (*f*), *a* (*g*), ſunt harmonicè diſpoſitæ.
def.16 h	*a* (*b*), *a* (*c*), *a* (*d*), ſunt ſimiliter harmonicè diſpoſitæ, atque *a* (*e*), *a* (*f*), *a* (*g*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 17. Prop. 17.

IN ſerie arithmetica, non maior, quàm dimidius termini proximi, non eſt medius.

Hypoth.

Sunto in ſerie arithmetica, tres termini *a*, *b*, *c*.
Dico *b*, maiorem eſſe, quàm dimidium, ad *c*.

Demonſtr.

	Eſto *b*, non maior, quàm dimidius ad *c*, ſi poteſt: eritque *b*, ęqualis, vel minor, quàm dimi-
def. 10.	dius ad *c*: eritque differentia *b*, *c*, defectus: cuius ſimilis differentia *a*, *b*, erit defectus.
hypoth.	*b*; *c*: non maior, quàm dimidius.
19. 7.	2*b*: non maior, quàm *c*.
	b: non maior, quàm *c*—*b*.
def.10.h.	*c*—*b*: *b*—*a*.
	b: non maior, quàm *b*—*a*.
	b+*a*: non maior, quàm *b*. quod eſt abſurdum.

b non

b non eſt dimidius ad *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 18. *Prop.* 18.

IN ſerie harmonica, terminus non minor, quàm duplus termini proximi, non eſt medius.

Hypoth.

Sunto in ſerie harmonica tres termini *a*, *b*, *c*.

Dico *b*, minorem eſſe, quàm duplum, ad *c*.

Demonſtr.

Eſto *b*, non minor, quàm duplus ad *c*, ſi poteſt. eritque differentia *b*, *c*, exceſſus: item differentia *a*, *b*, erit exceſſus.

*def.*18.*b* *a*---*b*; *b*---*c*: *a*; *c*.

hypoth. *b*; *c*: non minor, quàm duplus.

19. 7. *b*: non minor, quàm 2*c*.

b---*c*: non minor, quàm *c*.

14. 5. *a*---*b*: non minor, quàm *a*. Quod eſt abſurdum.

b, minor eſt, quàm duplus ad *c*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 19. *Prop.* 19.

QVælibet quantitas, & omnes eius multiplices ordinatæ, ſunt in ſerie arithmetica naturali.

Hypoth.

Eſto quantitas *u*, cuius multiplices ordinatæ 2*u*, 3*u*, 4*u*, &c.

Dico

Dico u, $2u$, $3u$, $4u$, & c. eſſe in ſerie arithmetica naturali.

Demonſtr.

hypoth. *def.12.h*	Omnes differentiæ u, $2u$, & $2u$, $3u$, & $3u$, $4u$, & reliquæ, ſunt ſimiles, & æquales ipſi rationali u: & eſt u ad $2u$ dimidia. Ergo u, $2u$, $3u$, $4u$, & c. ſunt in ſerie arithmetica naturali. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 20. Prop. 20.

QVælibet quantitas, & omnes eius ſubmultiplices ordinatæ, ſunt in ſerie harmonica naturali.

Hypoth.

Eſto quantitas u, cuius ſubmultiplices u (2), u (3), u (4), &c.

Dico u, u (2), u (3), u (4), &c. eſſe in ſerie harmonica naturali.

Demonſt.

19. h.	u, 2, 3, 4, &c. ſunt in ſerie arithmetica.
15. h.	u, u (2), u (3), u (4), &c. ſunt in ſerie harmonica.
hypoth.	u; u (2): eſt dupla.
def.20h	u, u (2), u (3), u (4), &c. ſunt in ſerie harmonica naturali. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 21. *Prop.* 21.

IN duabus ſeriebus arithmeticis naturalibus, termini ſunt ſimiliter proportionales, in proportione ordinata.

Hypoth.

Sint duæ ſeries arithmeticæ naturales: vna *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, &c. altera *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, &c.

Dico *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, eſſe ſimiliter proportionales atque *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, in proportione ordinata.

Demonſtr.

def.11.h. Defectus deinceps *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, ſunt æquales inter ſe, & ipſi primo termino *a*. item defectus deinceps *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, ſunt ęquales interſe, & ipſi *b*.

def.12.h *a*; 2*a*: *b*; 2*b*.

2. *p.* 2*a*; 3*a*: 2*b*; 3*b*:

2. *p.* 3*a*; 4*a*: 3*b*; 4*b*.

def.18.5 *a*, 2*a*, 3*a*, 4*a*, ſunt ſimiliter proportionales, atque *b*, 2*b*, 3*b*, 4*b*, in proportione ordinata. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 22. *Prop.* 22.

IN duabus ſeriebus harmonicis naturalibus, termini ſunt ſimiliter proportionales, in proportione ordinata.

Hypoth.

Sint duæ ſeries harmonicæ naturales: vna; *a*, *a* (2), *a* (3), *a* (4): altera *b*, *b* (2), *b* (3), *b* (4).

Dico

Dico *a*, *a* (2), *a* (3), *a* (4), eſſe ſimiliter proportionales, atque *b*, *b* (2), *b* (3), *b* (4), in proportione ordinata.

Demonſtr.

def.20h	*a*; *a* (2): *b*; *b* (2).
2. *p*.	*a*,—*a* (2); *a* (2): *b*,—*b* (2); *b* (2).
	Eſto, ſi poteſt, *a* (2); *a* (3): maior, quàm *b* (2); *b* (3).
4. 3.	*a* (2); *a* (2)— *a* (3): minor, quàm *b* (2); *b* (2) —*b* (3).
p. 3.	*a*,—*a* (2); *a* (2)—*a* (3): minor quàm *b*,—*b* (2); *b* (2)—*b* (3).
def.18b	*a*,—*a* (2); *a* (2)—*a* (3): *a*; *a* (3).
def.18b	*b*,—*b* (2); *b* (2)—*b* (3): *b*; *b* (3).
p. 3.	*a*; *a* (3): minor, quàm *b*; *b* (3).
def.20h	*a* (2); *a*: *b* (2); *b*.
p. 3.	*a* (2); *a* (3): minor, quàm *b* (2); *b* (3). contra ſuppoſitum.
	a (2); *a* (3): *b* (2); *b* (3).
ſup.	*a* (3); *a* (4): *b* (3); *b* (4).
def.18.5	*a*, *a* (2), *a* (3), *a* (4) ſunt ſimiliter proportionales, atque *b*, *b* (2), *b* (3), *b* (4) in proportione ordinata. Quod &c. Quare &c.

Theor. 23. Prop. 23.

DVarum ſerierum naturalium arithmeticę, & harmonicè, inter æquordinatos terminos, medij pro-

portionales ſunt æquales.

Hypoth.

Sint duæ ſeries naturales: vna arithmetica, ab *a*; altera harmonica, à *b*. & ſint quarti termini; in arithmetica, 4*a*; in harmonica, *b* (4). ſit autem inter *a*, *b*, media proportionalis *c*.

Dico *c*, mediam proportionalem eſſe, inter 4*a*, & *b* (4).

Demonſtr.

Quoniam 4*a*, *b* (4), ſunt quarti termini, in
19. *h.* ſuis ſeriebus: 4*a* ad *a*, eſt quadruplus: & *b* (4) ad
20. *h.* *b* ſubquadruplus.

4*a*; *a*: *b*; *b* (4).

hypoth. *a*; *c*: *c*; *b*.

p. p. 4*a*; *c*: *c*; *b* (4). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 24. *Prop.* 24.

IN ſerie arithmetica duo termini, cum æqueordinatis in harmonica, ſunt reciprocè proportionales.

Hypoth.

Sint in ſerie arithmetica duo termini 3*a*, 4*a*: & in harmonica duo æqueordinati *b* (3), *b* (4).

Dico 3*a*; 4*a*: *b* (4); *b* (3).

Præpar.

Aſſumatur inter æqueordinatos 3*a*, & *b* (3), medius proportionalis *c*.

De-

Demonſtr.

conſtr.	3*a*; *c*: *c*; *b* (3).
23. *b.*	4*a*; *c*: *c*; *b* (4).
2. *p.*	*c*; 4*a*: *b* (4); *c*.
p. p.	3*a*; 4*a*: *b* (4); *b* (3). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 25. Prop. 25.

SEries naturales, arithmetica, & harmonica, plures terminos habent, quàm quot quiſque dixerit, & cuiuſq; numeroſæ rationis.

Demonſtr.

20. 9. Nam numeri plures ſunt, quàm quot quiſque
19. *b.* dixerit, ſecundum quos accepti multiplices ad
20. *b.* primum terminum in ſerie arithmetica, & ſubmultiplices ad primum in harmonica, ſunt plures termini, quàm quot quiſque dixerit.

Quod ſi multiplices accepti fuerint, ſecundum
21. *b.* numeros numeroſæ rationis: erunt in arithmetica ſerie termini, eamdem numeroſam habentes rationem. item ſi accepti fuerint ſubmultiplices:
24. *b.* erunt in harmonica, termini, eamdem reciprocè numeroſam habentes rationem.

Deinde numeri bini, eamdem numeroſam habentes rationem, minimi omnium, & minimorum
20. 9. æquemultiplices numeri, ſecundum plures, quàm quot quiſque dixerit numeros, poſſunt accipi: ſe-

cun-

ſup. cundum quos acceptos binos numeros, termini multiplices in arithmetica, & ſubmultiplices in harmonica, poſſunt accipi bini plures, quàm quot quiſque dixerit, eamdem numeroſam habentes rationem.

Quare &c.

Theor. 26. Prop. 26.

IN ſerie arithmetica naturali ab vnitate, termini ſunt, vnitas, & omnes numeri ordinatim accepti,

Demonſtr.

Nam in ſerie arithmetica naturali ab vnitate, 19. *b.* omnes termini ſunt, ipſa vnitas, & omnes multiplices ad vnitatem, ordinatim accepti: ſed numeri ſunt multiplices ad vnitatem; & eorum ordo, eſt idem multiplicium. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 27. Prop. 27.

IN ſerie harmonica naturali à rationali, termini ſunt, ipſa rationalis, & fractiones, pro communi numeratore, habentes rationalem, & pro denominatoribus, habentes ordinatim omnes numeros.

Demonſtr.

Nam in ſerie harmonica naturali à rationali, 20. *b.* termini ſunt, ipſa rationalis, & omnes eius ſub- *def. 29 b* multiplices ordinatim accepti. Sed fractiones,

in

in quibus ipſa rationalis eſt numerator communis, & omnes numeri ſunt denominatores, ipſæ ſunt ſubmultiplices ad rationalem; & earum ordo, eſt idem ordo numerorum, per quos ipſæ ſubmultiplices ordinantur. Ergo &c,

Quare &c.

Theor. 28. *Prop.* 28.

SI fuerint duæ ſeries totidem terminorum; & inter primos, idem fuerit medius proportionalis, qui inter ſecundos, inter tertios, & deinceps inter æqueordinatos: ſiquidem in prima ſerie, ſunt quatuor arithmeticè diſpoſiti; in ſecunda ſerie, ſunt quatuor harmonicè diſpoſiti.

Hypoth.

Sint in prima ſerie, quatuor arithmeticè ordinati, a, $a+b$, c, $c+b$: ſit medius d: & ſint in altera ſerie ordinati $d2\ (a)$, $d2\ (a+b)$, $d2\ (c)$, $d2\ (c+b)$.

Dico $d2\ (a)$, $d2\ (a+b)$, $d2\ (c)$, $d2\ (c+b)$ eſſe harmonicè diſpoſitos.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam a ad d, eſt vt d ad $d2\ (a)$; ideſt quatuor proportionalium prima quantitas
11. h. eſt a, ſecunda & tertia eſt d: ergo quarta eſt fractio, cuius numerator, ſecunda poteſtas d; denominator, prima quantitas a. Similiter oſtendetur quod $d2\ (a+b)$, eſt ſecunda poteſtas d, denominata per $a+b$: & $d2\ (c)$, ſecunda poteſtas d, denominata per c: & denique $d2$

$(c+b)$,

$(c+b)$, ſecunda poteſtas d, denominata per $c+b$:
Ergo $d2\,(a)$, $d2\,(a+b)$, $d2\,(c)$, $d2\,(c+b)$, ſunt quatuor fractiones: quarum numerator communis, ſecunda poteſtas d; denominatores verò, ſunt quatuor arithmeticè diſpoſiti, a, $a+b$, c, c
14. *b.* $+d$. Ergo $d2\,(a)$, $d2\,(a+b)$, $d2\,(c)$, $d2\,(c+b)$, ſunt harmonicè diſpoſitæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 29. Propoſ. 29.

QVorum productorum quidam ſunt communes, quidam non communes producentes, aggregatum, eſt productus producentium communium, & aggregati producentium non communium.

Hypoth.

Duorum productorum ab, ac, communis producens eſto a: non communes ſunto b, c; quorum ſumma d.

Dico $ab+ac: ad$.

Demonſtr.

9. *b.* | $ab;\ ac:\ b;\ c.$
2. *p.* | $ab+ac;\ ac:\ b+c;\ c.$
hypoth. | $b+c:\ d.$
7. 5. | $ab+ac;\ ac:\ d;\ c.$
9. *b.* | $ad;\ ac:\ d;\ c.$
11. 5. | $ab+ac;\ ac:\ ad;\ ac.$
9. 5. | $ab+ac:\ ad.$ Quod &c. Quarè &c.

Theor. 30. Prop. 30.

QVorum productorum quidam ſunt communes, quidam non communes, & inæquales producentes, differentia, eſt productus producentis communis, & differentiæ producentium non communium.

Hypoth.

Duorum productorum *ab*, *ac*, communis producens eſto *a*, non communes ſunto *b*, *c*: & eſto *b* maior, quàm *c*; quorum differentia *d*.

Dico *ab*---*ac*: *ad*.

Demonſtr.

9. *b.*	*ab*; *ac*: *b*; *c*.
2. *p.*	*ab*---*ac*; *ac*: *b*---*c*; *c*.
hypoth.	*b*---*c*: *d*.
7. 5.	*ab*---*ac*; *ac*: *d*; *c*.
9. *b.*	*ad*; *ac*: *d*; *c*.
11. 5.	*ab*---*ac*: *ad*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 31. Prop. 31.

QVatuor proportionalium productus extremorum, eſt æqualis producto mediorum.

Hypoth.

Sunto proportionales *a*; *b*: *c*; *d*.

Dico *ad*: *bc*.

Præpar.

Aſſumatur productus alternorum *ac*.

Demonſtr.

9. *h.*	*ac*; *ad*: *c*; *d*.
9. *h.*	*ac*; *bc*: *a*; *b*.
hypoth.	*a*; *b*: *c*; *d*.
11. 5.	*ac*; *ad*: *ac*; *bc*.
9. 5.	*ad*: *bc*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 32. Prop. 32.

QVatuor termini, quorum extremorum productus eſt æqualis producto mediorum, ſunt proportionales.

Hypoth.

Quatuor terminorum *a*, *b*, *c*, *d*, productus extremorum *ad*, & productus mediorum *bc*, ſunt æquales.

Dico *a*; *b*: *c*; *d*.

Præpar.

Aſſumatur productus alternorum *ac*.

Demonſtr.

7. 5.	*ac*; *bc*: *ac*; *ad*.
9. *h.*	*ac*; *bc*: *a*; *b*.
9. *h.*	*ac*; *ad*: *c*; *d*.
11. 5.	*a*; *b*: *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 33. Prop. 33.

SI fuerint duæ ſeries totidem terminorum; & inter primos idem fuerit medius proportionalis, qui inter ſecun-

cundos, inter tertios, & deinceps inter æqueordinatos: ſiquidem in prima ſerie, ſunt quatuor harmonicè diſpoſiti; in ſecunda ſerie, ſunt quatuor arithmeticè diſpoſiti.

Hypoth.

Sint in prima ſerie quatuor harmonicè ordinati *a*, *b*, *c*, *d*: & ſit medius *e*: & ſint in altera ſerie ordinati *e2* (*a*), *e2* (*b*), *e2* (*c*), *e2* (*d*).

Dico *e2* (*a*), *e2* (*b*), *e2* (*c*), *e2* (*d*), eſſe arithmeticè diſpoſitos.

Demonſtr.

def.13.h	*a* — *b*; *c* — *d*: *a*; *c*, + *b*; *d*.
8. *h.*	*ab*; *cd*: *a*; *c*, + *b*; *d*.
11, 5.	*a* ÷ *b*; *c* ÷ *d*: *ab*; *cd*.
30. &	*acd* — *bcd*: *abc* — *abd*.
31. *h.*	adhibito communi producente *e2*.
9. *h.*	*e2acd* — *e2bcd*: *e2abc* — *e2abd*.
	communiter denominando per *abcd*.
10. & 13. *h.*	*e2* (*b*) — *e2* (*a*): *e2* (*d*) — *e2* (*c*).
def.5.h.	*e2* (*a*), *e2* (*b*), *e2* (*c*), *e2* (*d*), ſunt arithmeticè diſpoſiti. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 34. Prop. 34.

QVatuor termini harmonicè diſpoſiti, permutando, ſunt harmonicè diſpoſiti.

Hypoth.

Sint quatuor termini *a*, *b*, *c*, *d*, harmonicè diſpoſiti.

Dico permutando *a, c, b, d* eſſe harmonicè diſpoſitos.

Præpar.

Aſſumatur quælibet quantitas *e*, & fiat

a; e: e; f.
b; e: e; g.
c; e: e; h.
d; e: e; l.

Demonſtr.

hypoth.	*a, b, c, d* ſunt harmonicè diſpoſiti.
33. *h.*	*f, g, h, l* ſunt arithmeticè diſpoſiti.
4. *h.*	*f, h, g, l* ſunt arithmeticè diſpoſiti.
28. *h.*	*a, c, b, d* ſunt harmonicè diſpoſiti. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 35. Prop. 35.

SI fuerint aliquot quantitates in una ſerie, ſimiliter harmonicæ diſpoſitæ, atque aliæ totidem, in altera: erunt ex æqualitate harmonica, prima & vltima, in vna ſerie, item prima & vltima, in altera, diſpoſitæ harmonicè.

Hypoth.

Sint *a, b, c* ſimiliter harmonicè diſpoſitæ, atque aliæ totidem *d, e, f.*

Dico ex æqualitate harmonica, eſſe diſpoſitas harmonicè, *a, c,* & *d, f.*

Præpar.

Aſſumatur quælibet quantitas *g.* & fiat

a; g;

a; g: g; h
b; g: g; k
c; g: g; l
d; g: g; m
e; g: g; n
f; g: g; o.

Demonſtr.

def.16b | a, b, d, e ſunt harmonicè diſpoſitæ.
33. b. | h, k, m, n ſunt arithmeticè diſpoſitæ.
def.16b | b, c, e, f ſunt harmonicè diſpoſitæ.
33. b. | k, l, n, o ſunt arithmeticè diſpoſitæ.
def.8.b. | h, k, l ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque m, n, o.
5. b. | h, l, m, o ſunt arithmeticè diſpoſitæ.
28. b. | a, c, d, f ſunt harmonicè diſpoſitæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 36. Prop. 36.

HArmonicè diſpoſitarum ęqueſubmultiplices, ſunt harmonicè diſpoſitæ.

Hypoth.

Sint harmonicè diſpoſitæ *a*, *b*, *c*, *d*: quarum æque ſubmultiplices *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3).

Dico *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3) eſſe harmonicè diſpoſitas.

Præpar.

Aſſumatur quælibet quantitas *e*. & fiat

a; e:

a; *e*: *e*; *f*
b; *e*: *e*; *g*
c; *e*: *e*; *h*
d; *e*: *e*; *l*.

Et quotuplices ſunt *a*, *b*, *c*, *d* ad *a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3), totuplices accipiantur ipſarum *f*, *g*, *h*, *l*, quæ quæ ſint 3*f*, 3*g*, 3*h*, 3*l*.

Demonſtr.

hypoth.	*a*, *b*, *c*, *d*, ſunt harmonicè diſpoſitæ,
33. *h.*	*f*, *g*, *h*, *l*, ſunt arithmeticè diſpoſitę.
6. *h.*	3*f*, 3*g*, 3*h*, 3*l*, ſunt arithmeticè diſpoſitæ.
præpar.	*a*(3); *a*: *f*; 3*f*.
præpar.	*a*; *e*: *e*; *f*.
p. p.	*a*(3); *e*: *e*; 3*f*.
ſup.	*b*(3); *e*: *e*; 3*g*.
ſup.	*c*(3); *e*: *e*; 3*h*.
ſup.	*d*(3); *e*: *e*; 3*l*.
28. *h.*	*a*(3), *b*(3), *c*(3), *d*(3) ſunt harmonicè diſpoſitæ. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 37. *Prop.* 37.

SI fuerint aliquot primæ quãtitates, arithmeticè ſimiliter diſpoſitæ, atque aliæ totidem ſecundæ, vtræque in vna ſerie: fuerint autem & aliæ totidem quantitates primę, aliæque totidem ſecundæ in altera: & fuerit vna eadem quantitas media proportionalis inter primas primarum, & in-

& inter ſecundas primarum, & deinceps inter æqueordinatas; item inter primas ſecundarum, & inter ſecundas, & deinceps inter æqueordinatas: erunt in ſecunda ſerie primæ ſimiliter harmonicè ordinatæ, atque ſecundæ.

Demonſtr.

Quoniam enim primarum in prima ſerie prima, & ſecunda; & ſecundarum in prima ſerie prima, & ſecunda, ſunt arithmeticè diſpoſitæ: conſtat, quod etiam in ſecunda ſerie primarum prima, & ſecunda; & ſecundarum prima, & ſecunda, ſunt harmonicè diſpoſitę. conſtat ſimiliter, quod in ſecunda ſerie, primarum ſecunda, & tertia; & ſecundarum ſecunda, & tertia ſunt harmonicè diſpoſitæ. Et ita deinceps vſque ad vltimas primarum, & ſecundarum. Quare primæ in ſecunda ſerie, ſunt ſimiliter harmonicè ordinatę, atque ſecundæ.

def.8.h. *28. h.* *def.16.h*

Theor. 38. Prop. 38.

SI fuerint aliquot primæ quantitates harmonicè ſimiliter diſpoſitæ, atque aliæ totidem ſecundæ, vtræque in vna ſerie: fuerint autem & aliæ totidem quantitates primę, aliæque totidem ſecundæ, in altera ſerie: & fuerit vna eadem quantitas media proportionalis inter primas primarum, & inter ſecundas primarum, & deinceps inter æqueordinatas; necnon media proportionalis inter primas ſecundarum, & inter ſecundas ſecundarum, & dein-

ceps

ceps inter æqueordinatas: erunt in altera ſerie, primæ ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque ſecundæ.

Demonſt.

def.16b | Quoniam enim primarum in prima ſerie, prima & ſecunda, & ſecundarum in prima ſerie, prima & ſecunda, ſunt harmonicè diſpóſitæ: conſtat
33.b | quod & in ſecunda ſerie, primarum prima & ſecunda, & ſecundarum prima & ſecunda, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. item oſtendetur, quod primarum in ſecunda ſerie ſecunda, & tertia, & ſecundarum ſecunda & tertia, ſunt arithmeticè diſpoſitæ. & ſic deinceps vſque ad vltimas primarum,
def.8.b. | & ſecundarum. Quare primæ in ſecunda ſerie, ſunt ſimiliter arithmeticè diſpoſitæ, atque ſecūdę.

Theor. 39. Prop. 39.

INter duas quantitates media proportionalis, eadem eſt etiam inter ſubmultiplicem vnius, & æquemultiplicem alterius.

Hypoth.

Eſto inter duas *a*, *b*, media proportionales *c*: & eſto ipſius *a*, ſubmultiplex *a* (3); & ipſius *b*, æquemultiplex 3*b*.

Dico *a* (3); *c*: *c*; 3*b*.

Demonſtr.

hypoth. | *a* (3); *a*: *b*; 3*b*.
hypoth. | *a*; *c*: *c*; *b*.
p. p. | *a* (3); *c*: *c*; 3*b*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 40. *Prop.* 40.

IN ſerie harmonica naturali, aliquoteni ab vno, & aliquoteni ab altero, per numeros alterutrorum multitudinis terminorum ſubmultiplicati; ſicut primi quotientes, ſimiliter ſecundi, ſunt harmonicè diſpoſiti: item tertij, & quarti, & ſic deinceps.

Hypoth.

Sint in ſerie harmonica naturali duo termini *a*, *b*: & ab *a*, ſumantur terni ſubquadrupli; & à *b*, quaterni ſubtripli.

Dico primos ternos ſubquadruplos ab *a*, & primos ſubtriplos à *b*, ſimiliter eſſe diſpoſitos harmonicè; atque ſecundos ſubquadruplos ternos ab *a*, & ſecundos ſubtriplos quaternos à *b*.

Præpar.

Ordinetur ſeries arithmetica naturalis: in qua ſint, *c* æqueordinatus, atque *a*; & *d* æqueordinatus, atque *b*. ſumanturque quadrupli terni à *c*, & tripli quaterni à *d*. ſumatur etiam inter *a*, & *c* medius proportionalis *e*.

Demonſtr.

conſtr. Quoniam *e*, medius proportionalis eſt inter *a*, *c*: medius etiam proportionalis eſt inter *b*, *d*; &
23. *h.* inter æqueordinatos terminos in vtraque ſerie na-
39. *h.* turali arithmetica, & harmonica. item eſt medius proportionalis inter multiplices terminorum arithmeticæ ſeriei naturalis, & inter æqueſubmulti-
7. *h.* plices terminorum harmonicæ. ſed quadrupli terni à *c*, & tripli quaterni à *d*, primi, ſunt ſimiliter

arithmeticè diſpoſiti, atque ſecundi; item, atque
37. *b.* tertij, atque quarti, & deinceps. Ergo etiam ſubquadrupli terni ab *a*, & ſubtripli quaterni à *b*, primi, ſunt ſimiliter harmonicè diſpoſiti, atque ſecundi; item, atque tertij, atque quarti, & deinceps. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 41. Propoſ. 41.

SVmma fractionum communem habentium denominatorem, eſt ſumma numeratorum, ab eodem denominatore denominata.

Hypoth.

Fractiones *a* (*b*), *c* (*b*) communem habent denominatorem: numeratorum ſumma eſt *a*+*c*.

Dico *a* (*b*) + *c* (*b*) : *a*+*c* (*b*).

Demonſtr.

10. *b.* | *a*(*b*); *c*(*b*): *a*; *c*.
2. *p.* | *a*(*b*) + *c* (*b*); *c* (*b*): *a*+*c*; *c*.
10. *b.* | *a* + *c* (*b*); *c* (*b*): *a*+*c*; *c*.
11. 5. | *a* (*b*) + *c* (*b*); *c* (*b*): *a*+*c* (*b*); *c* (*b*).
9. 5. | *a*(*b*) + *c* (*b*): *a*+*c* (*b*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 42. Prop. 42.

DIfferentia fractionum communem habentium denominatorem, eſt differentia numeratorum, ab eodem

dem denominatore denominata.

Hypoth.

Fractiones $a(b)$, $c(b)$, communem habent denominatorem b: differentia numeratorum eſt $a---c$.

Dico $a(b)---c(b)$: $a---c(b)$.

Demonſtr.

10. *b.* | $a(b)$; $c(b)$: a; c.
2. *p.* | $a(b)---c(b)$; $c(b)$: $a---c$; c.
10. *b.* | $a---c(b)$; $c(b)$: $a---c$; c.
11. 5. | $a(b)---c(b)$; $c(b)$: $a---c(b)$; $c(b)$.
9. 5. | $a(b)---c(b)$: $a---c(b)$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 43. Prop. 43.

DVorum inęqualium numerorum, vnitas denominata à minore, & differentia denominata à maiore, ſunt fractiores duæ, quarum ſumma eſt maior, quàm differentia eorumdem, aucta vnitate, denominata à maiore.

Hypoth.

Sunto duo inæquales numeri, minor a, maior $a+b$.

Dico $1(a)+b(a+b)$: maiorem eſſe, quàm $b+1(a+b)$.

Demonſtr.

12. *b.* | $1(a)$; $1(a+b)$: $a+b$; a.
| $1(a)$: maior quàm $1(a+b)$.
| communiter addatur $b(a+b)$.
41. *b.* | $1(a)+b(a+b)$: maior eſt, quàm $b+1(a+b)$.
| Quod &c. Quare &c.

Theor. 44. Prop. 44.

QValibet quantitate, à ſe ipſa, & à ſuis deinceps per ordinem multiplicibus, denominata; fit ſeries harmonica naturalis.

Hypoth.

Eſto quælibet quantitas *a*, eiuſque multiplices 2*a*, 3*a*, 4*a*, & deinceps.

Dico *a*(*a*), *a*(2*a*), *a*(3*a*), *a*(4*a*), & deinceps eſſe ſeriem harmonicam naturalem.

Præpar.

Eſto rationalis *u*: & à rationali ordinetur ſeries harmonica naturalis *u*, *u*(2), *u*(3), *u*(4), & deinceps.

Demonſtr.

def.29h	*a*; *u*: *a*; *a*(*a*).
9. 5.	*u*: *a*(*a*).
12. h.	*a*(*a*); *a*(2*a*): 2*a*; *a*: *u*; *u*(2) dupla.
9. 5.	*a*(2*a*): *u*(2).
ſup.	*a*(3*a*): *u*(3).
ſup.	*a*(4*a*): *u*(4).
def.20h	*a*(*a*), *a*(2*a*), *a*(3*a*), *a*(4*a*), eſt ſeries harmonica naturalis. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 45. Prop. 45.

SI fuerint duo prologarithmi, ex terminis ab vnitate; alter, ex quotcunque terminis; alter, ex totidem, & vno amplius: erit qui ex pluribus, eo qui ex paucioribus, perſpectè maior.

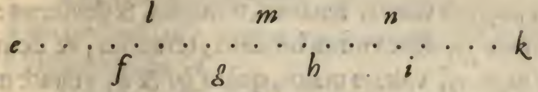
Hy-

Hypoth.

Sunto duo prologarithmi, ex terminis ab vnitate: alter *A*, ex tot terminis, quotus eſt numerus *b*: alter *C*, ex tot, quotus eſt *d*. & eſto *d*, vnitate maior, quàm *b*.

Dico *C*, perſpectè maiorem eſſe, quàm *A*.

Præpar.

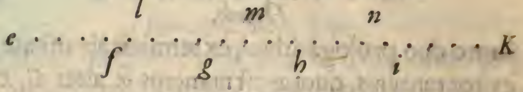


Sumatur numerus *b* toties, quotus eſt *d*: & ſint ſumpti numeri *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*. Item ſumatur numerus *d* toties, quotus eſt *b*: & ſint ſumpti *el*, *lm*, *mn*, *nk*.

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, eſt æqualis producto *d* per *b*: ſumma numerorum *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, eſt æqualis ſummæ numerorum *el*, *lm*, *mn*, *nk*, eſtque idem numerus *ek*. Et quoniam *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, ſunt æquales inter ſe: ergo *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *ek*, ſunt ſimplex *b*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices. Item quoniam *el*, *lm*, *mn*, *nk*, ſunt æquales: ergo *el*, *em*, *en*, *ek*, ſunt ſimplex *d*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices.

Deinde quoniam *d*, vnitate maior eſt, quàm *b*: ergo 2*d*, binario maior eſt, quàm 2*b*: & 3*d*, ternario maior eſt, quàm 3*b*: & ſic deinceps, & ſimiliter *el*, vnitate maior, quàm *ef*: & *em*, binario maior, quàm *eg*: & *en*, ternario maior,



maior quàm *eh*: & ſic deinceps. item ſimiliter *nk*, vnitate maior, quàm *ik*: & *mk*, binario maior, quàm *hk*: & *lk*, ternario maior, quàm *gk*. Quare *fl*, *gm*, *hn*, & deinceps, ſunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps: item *in*, *hm*, *gl*, ſunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps. Eſt ergo *ef*, vnitate maior, quàm *lg*; & *lg*, vnitate maior, quàm *mh*; & *mh*, vnitate maior, quàm *ni*; & *ni*, eſt vnitas.

Cum itaque tres ſint quantitates inæquales *ef*, *el*, *eg*, quarum *ef* minima, *el* media, *eg* maxima. ſi *lg*, vnitate aucta, denominetur ab *ef*; &
3. b. *fl*, ab *eg*: fiunt duæ fractiones, quarum ſumma, maior eſt, quàm *fg* vnitate aucta, denominata ab *el*. Sed *lg*, vnitate aucta, eſt *ef*; & *fg*, vnitate aucta, eſt *el*: ergo

ef (*ef*) + *fl* (*eg*): maior eſt, quàm *el* (*el*).

Similiter oſtendetur,

lg (*eg*) + *gm* (*eh*): maior, quàm *lm* (*em*).

Et *ml* (*eh*) + *hn* (*ei*): maior, quàm *mn* (*en*).

Deinde, cum duo ſint inæquales numeri, *ei*,
43. b. *ek*; quorum minor *ei*, maior *ek*, differentia *ik*: ſitque vnitas *ni*: & differentia *ik*, vnitate aucta, ſit *nk*. ergo

ni (*ei*) + *iK* (*eK*): maior eſt, quàm *nK* (*eK*.

44. b. Sed *ef* (*ef*), *fl*+*lg* (*eg*), *gm*+*mh* (*eh*), *hn*+*ni*- (*ei*),

(*ei*), *iK* (*eK*) ſunt termini componentes prologarithmum *C*. nam *ef*, *fl*+*lg*, *gm*+*mh*, *hn*+*ni*, *iK*, ſunt numeratores æquales ipſi *b*, quos denominant, *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *eK*, nempe ſimplex *b*, duplex, triplex, & deinceps multiplices.

Eadem ratione conſtat, quod *el* (*el*), *lm* (*em*), *mn* (*en*), *nK* (*eK*) ſunt termini componentes prologarithmum *A*.

def. 26 *b* Ergo *C*, peſpectè maior eſt, quàm *A*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 46. Prop. 46.

SI duorum inæqualium numerorum differentia, denominetur à minore; vnitas verò, à maiore: fiunt duæ fractiones; quarum ſumma, minor eſt, quàm differentia, vnitate aucta, denominata à minore.

Hypoth.

Sunto duo inæquales numeri *a*, *a*+*b*.

Dico *b* (*a*)+1 (*a*+*b*): minorem eſſe, quàm *b*+1 (*a*).

Demonſtr.

12. *b*. 1 (*a*+*b*); 1 (*a*): *a*; *a*+*b*.

1 (*a*+*b*): minor, quàm 1 (*a*).

addito communi *b* (*a*).

41. *b*. *b* (*a*)+1 (*a*+*b*): minor, quàm *b*+1 (*a*). Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 47. Prop. 47.

SI fuerint prologarithmi ex duobus terminis à ſecundo, ex tribus à tertio, ex quatuor à quarto, & ſic deinceps: qui ex pluribus, perſpectè minor eſt, quàm, qui ex paucioribus vno.

Hypoth.

Sint duo prologarithmi; alter *A*, ex terminis ab 1(*b*); & ex tot terminis, quotus eſt *b*; alter *C*, ex terminis ab 1 (*d*), & ex tot terminis, quotus eſt *d*: & eſto *b*, vnitate minor, quàm *d*.

Conſtat, quod 1(*b*), totus ordine eſt, quotus, eſt *b*: & 1 (*d*), totus ordine, quotus eſt *d*. *prop.* 27. *h*.

Dico *C*, perſpectè minorem eſſe, quàm *A*.

Præpar.

m *n* *o*
e---20---*f* . . . . *l*
g *h* *i* *k*

Sumatur productus *bd*, qui ſit *ef*: eique adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, *kl*: eidemque *ef*, tot *d* adijciantur, quotus eſt *b*, qui ſint *fm*, *mn*, *no*, *ol*.

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, & productus *d* per *b*, ſunt æquales: ſumma numerorum *fg*, *gh*, *hi*, *ik*, *kl*, ſummæ *fm*, *mn*, *no*, *ol*, eſt æqualis: eſtque idem numerus *fl*. Et quoniam *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, *Kl*, ſunt æquales: ergo *fg*, *fh*, *fi*, *fK*, *fl*, ſunt ſimplex *b*, duplex, triplex, & reliqui deinceps

ceps

inceps multiplices. Item quoniam *fm*, *mn*, *no*, *ol*, ſunt æquales: ergo *fm*, *fn*, *fo*, *fl*, ſunt ſimplex *d*, duplex, triplex, & reliqui deinceps multiplices. Sed *ef*, ad *b* totuplex eſt, quotus eſt $d+1$: & *eh*, quotus eſt $d+2$: ideoque *ef*, *eg*, *eh*, *ei*, *eK*, ſunt totuplices ad *b*, quoti ſunt *d*, $d+1$, $d+2$, $d+3$, $d+4$. Item cum ſit *ef*, ad *d* totuplex, quotus eſt *b*: erunt *ef*, *em*, *en*, *eo*, totuplices ad *d*, quoti ſunt *b*, $b+1$, $b+2$, $b+3$.

Deinde quoniam *d*, vnitate maior eſt, quàm *b*: ergo $2d$, binario maior eſt, quàm $2b$: & $3d$, ternario maior, quàm $3b$; & ſic deinceps, & ſimiliter *fm*, vnitate maior, quàm *fg*; & *fn*, binario maior, quàm *fh*; & *fo*, ternario maior, quàm *fi*; & ſic deinceps. item ſimiliter *ol*, vnitate maior, quàm *Kl*; & *nl*, binario maior, quàm *il*; & *ml*; ternario maior, quàm *hl*. Quare *gm*, *hn*, *io*, ſunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps: item *oK*, *ni*, *mh*, ſunt vnitas, binarius, ternarius, & deinceps. Ergo *gm*, auctus vnitate, eſt *hn*; & *hn*, auctus vnitate, eſt *io*; & *io*, auctus vnitate, eſt *iK*, vel *b*.

Itaque ſunt inæquales, & minores primùm, deinde maiores hoc ordine, *ef*, *eg*, *em*, *eh*, *en*, *ei*, *eo*, *eK*: quorum minimus *ef*, eſt productus *bd*: & differentia *ef*, *eg*, eſt *fg*, nempe *b*: eſt
9. *b*. autem *bd* ad $b2$, ſicut *d* ad *b*, maior: ergo minimus *ef*, non eſt minor, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *ef*, *eg*. ideoque neque *eg*, minor eſt, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *eg*, *eh*.

 neque

m n o

e---20---f l

g h i K

neque *eh*, minor, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *eh*, *ei*. neque *ei*, minor, quàm ſecunda poteſtas differentiæ *ei*, *ek*.

Quare ſi *fg*, denominetur ab *ef*; & vnitas *gm*,
46. b. denominetur ab *eg*: ſumma fractionum, minor eſt, quàm ſi *fg*, aucta vnitate, denominetur ab *ef*. eſt autem *fg*, aucta vnitate, æqualis ipſi *fm*: ergo

fg (*ef*)+*gm* (*eg*): minor eſt, quàm *fm* (*ef*).

2. b. Item ſi *mh* denominetur ab *eg*; & *gm*, aucta vnitate, ideſt *hn* denominetur ab *eh*: ſumma fractionum, minor eſt, quàm ſi *gh*, aucta vnitate, ideſt *mn*, denominetur ab *eh*.

mh (*eg*)+*hn* (*eh*): minor eſt, quàm *mn* (*eh*).

Similiter oſtendetur, quod

ni (*eh*)+*io* (*ei*): minor eſt, quàm *no* (*en*).

Et quòd

oK (*ei*)+*Kl* (*eK*): minor eſt, quàm *ol* (*eo*).

Sed *fg* (*ef*), *gm*+*mh* (*eg*), *hn*+*ni* (*eh*), *io*+*oK*-(*ei*), *Kl* (*eK*), ſunt 1 (*d*), 1 (*d*+1), 1 (*d*+2), & deinceps reliqui termini, tot, quotus eſt *d*, componentes prologarithmum *C*. nam *fg*, eſt *b*: & *ef*, eſt productus *bd*: & *fg* (*ef*), eſt *b* (*bd*); ideſt, 1 (*d*).
13. b. item *gm*+*mh* eſt *b*: & *eg*, eſt *bd*+*b*: & *gm*+*mh*-(*eg*), eſt *b* (*bd*+*b*); ideſt, 1 (*d*+1). & ſic deinceps.

Simi-

13. b. Similiter $fm(ef)$, $mn(em)$, $no(en)$, $ol(eo)$, ſunt $1(b)$, $1(b+1)$, & deinceps reliqui termini, tot, quotus eſt b, componentes prologarithmum A. nam fm, mn, no, ol, ſunt d: & ef, em, en, eo, ſunt bd, $bd+d$, $bd+2d$, $bd+3d$, & ipſę fractiones
13. b. ſunt $d(bd)$, $d(bd+d)$, $d(bd+2d)$, $d(bd+3d)$; ideſt, $1(b)$, $1(b+1)$. &c.

def. 27. b. Ergo C, eſt perſpectè minor, quàm A. Quod &c. Quare &c.

Theor. 48. Prop. 48.

SI fuerint duæ ſeries prologarithmorum, ex terminis ab vnitate; altera, ex quotcunque terminis; altera, ex totidem, & vno amplius: erit ſecundus prologarithmus ex pluribus, ſecundo ex paucioribus, perſpectè maior: & tertius, tertio: & quartus, quarto: & ſic deinceps ſinguli prologarithmi vnius ſeriei, ſingulis prologarithmis æqueordinatis alterius, perſpectè ſunt maiores.

Hypoth.

Sint duę ſeries prologarithmorum ex terminis ab vnitate: altera A, ex tot terminis, quotus eſt numerus b: altera C, ex tot, quotus eſt d. & eſto d, vnitate maior, quàm b.

Dico ſecundum prologarithmum ſeriei C, perſpectè maiorem eſſe, ſecundo ſeriei A.

Præpar.

		l	*m*	*n*			*t*	*u*	*x*		
e	...	...	...	...	*K*	...	...	...	...	...	*s*
	f	*g*	*h*	*i*		*o*	*p*	*q*	*r*		

Sumatur numerus *b* toties, quotus eſt *d*: & ſint ſumpti numeri *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *iK*. item numerus *d* toties, quotus eſt *b*: & ſint ſumpti numeri *el*, *lm*, *mn*, *nK*. Sumatur iterum *b* toties, quotus eſt *d*: & ſint ſumpti numeri *Ko*, *op*, *pq*, *qr*, *rs*. & iterum *d*, ſumatur toties, quotus eſt *b*: & ſint ſumpti numeri *Kt*, *tu*, *ux*, *xs*.

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, eſt æqualis producto *d* per *b*: ſumma numerorum *ef*, *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, ſummæ numerorum *el*, *lm*, *mn*, *nK*, eſt æqualis: & ſumma numerorum *Ko*, *op*, *pq*, *qr*, *rs*, ſummæ *Kt*, *tu*, *ux*, *xs*, eſt æqualis. Sunt autem & ſingulæ partes *ek*, ſingulis *Ks* partibus æquales; & omnes, omnibus: & *ef*, *el*, *eg*, *em*, *eh*, *en*, *ei*, *ek*, ipſis *ko*, *kt*, *kp*, *ku*, *kq*, *kx*, *kr*, *ks*; ſinguli numeri, ſingulis æquales; & eorum dif-
def. 8. *b*. ferentiæ æquales, & ſimiles: atque omnes ordinatim accepti, vt ſupra, vſque ad *k*, ſimiliter arithmeticè ſunt diſpoſiti, atque omnes reliqui, vſque ad
45. *b*. *s*. Et ſicut demonſtratum eſt, quòd
3. *b*. *ef* (*ef*) + *fl* (*eg*): maior eſt, quàm *el* (*el*).
3. *b*. *lg* (*eg*) + *gm* (*eh*): maior, quàm *lm* (*em*).
3. *b*. *mh* (*eh*) + *hn* (*ei*): maior, quàm *mn* (*en*).

ni-

43. h. *ni*(*ei*)+*ik*(*ek*): maior, quàm *nk* (*ek*).
ita in præſenti demonſtrabitur, eodem prorſus argumento, quòd

3. h. *ko*(*eo*)+*ot*(*ep*): maior eſt, quàm *kt*(*et*).

3. h. *tp*(*ep*)+*pu*(*eq*: maior, quàm *tu*(*eu*).

3. h. *uq*(*eq*)+*qx*(*er*): maior, quàm *ux*(*ex*).

43. h. *xr*(*er*)+*rs*(*es*): maior, quàm *xs*(*es*).

45. h. Item ſicut demonſtratum eſt, quòd

ef(*ef*), *fl*+*lg*(*eg*), *gm*+*mh*(*eh*), *hn*+*ni*(*ei*), *ik*(*ek*), ſunt termini componentes primum prologarithmum ſeriei *C*: & quòd *el*(*el*), *lm*(*em*), *mn*(*en*), *nK*(*eK*), ſunt componentes primum ſeriei *A*. ita demonſtrabitur in præſenti, quòd

Ko(*eo*), *ot*+*tp*(*ep*), *pu*+*uq*(*eq*), *qx*+*xr*(*er*), *rs*-(*es*), ſunt termini componentes prologarithmum ſecundum ſeriei *C*: & quòd *Kt*(*et*), *tu*(*eu*), *ux*(*ex*), *xs*(*es*), ſunt componentes ſecundum prologarithmum ſeriei *A*.

45. h. Et omninò ſicut oſtenſum eſt, quòd primus ſeriei *C*, eſt perſpectè maior, primo ſeriei *A*: ita

def. 8. h. demonſtrabitur, quòd ſecundus ſeriei *C*, eſt perſpectè maior ſecundo ſeriei *A*. Quod &c.

Similiter oſtendetur, quòd & tertius tertio, & quartus quarto, ſunt perſpectè maiores: & quòd quiſque prologarithmus ſeriei *C*, perſpectè maior eſt, æqueordinato prologarithmo ſeriei *A*.

Quare &c.

Theor. 49. *Prop.* 49.

SI fuerint ſeries prologarithmorum, ex binis à ſecundo, ex ternis à tertio, ex quaternis à quarto, & ſic deinceps: ſecundus prologarithmus eius, quę ex pluribus, perſpectè minor eſt, quàm ſecundus eius, quæ ex paucioribus vno: & tertius, perſpectè minor, quàm tertius: & quartus, quàm quartus: & ſic deinceps vnuſquiſque perſpectè eſt minor, quàm ſuus æqucordinatus prologarithmus.

Hypoth.

Sint duæ ſeries prologarithmorum: altera *A*, ex terminis ab 1(*b*), & ex totenis, quotus eſt *b*: altera *C*, ex terminis ab 1(*d*), & ex totenis, quotus eſt *d*. & eſto *b*, vnitate minor, quàm *d*.

Conſtat, quòd 1(*b*) totus eſt ordine, qnotus *b*: & 1(*d*), totus ordine, quotus *d*. *prop.* 27. *h.*

Dico ſecundum prologarithmum ſeriei *C*, perſpectè minorem eſſe, ſecundo ſeriei *A*.

Præpar.

m n o q s u
e---20---*f*.......................*l*..................................*y*
g h i K p r t x

Sumatur productus *bd*, qui ſit *ef*: eique adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *fg*, *gh*, *hi*, *iK*, *Kl*: eidemque *ef*, tot *d* adijciantur, quotus eſt *b*, qui ſint *fm*, *mn*, *no*, *ol*, & iterum ipſi *el*, adijciantur tot *b*, quotus eſt *d*, qui ſint *lp*, *pr*, *rt*, *tx*, *xy*: necnon iterum eidem *el*, adijciantur tot

d,

d, quotus eſt *b*, qui ſint *lq*, *qs*, *su*, *uy*.

Demonſtr.

16. 7. Quoniam productus *b* per *d*, eſt æqualis pro-
ducto *d* per *b*: ſumma numerorum *fg*, *gh*, *hi*, *iK*,
Kl, ſummæ *fm*, *mn*, *no*, *ol*, eſt æqualis: & ſum-
ma *lp*, *pr*, *rt*, *tx*, *xy*, ſummæ *lq*, *qs*, *su*, *uy*,
æqualis. Sunt autem & ſingulæ partes *fl*, ſingu-
lis *ly* partibus æquales; & omnes, omnibus: & *fg*,
fm, *fh*, *fn*, *fi*, *fo*, *fK*, ipſis *lp*, *lq*, *lr*, *ls*, *lt*,
lu, *lx*, ſinguli numeri, ſingulis æquales: & eorum
differentiæ æquales, & ſimiles: additiſque vtrimq;
communibus numeris *ef*, *el*, etiam compoſito-
def.8.b. rum differentiæ ſunt æquales & ſimiles: & *ef*, *eg*,
em, *eh*, *en*, *ei*, *eo*, *eK*, ſunt ſimiliter arithmeti-
cè diſpoſiti, atque *el*, *ep*, *eq*, *er*, *es*, *et*, *eu*, *ex*.
47. b. Eſt autem *ef*, non minor, quàm ſecunda poteſtas
fg, & eſt *el*, maior, quàm *ef*; & *lp* æqualis ipſi *fg*:
ergo *el* non minor eſt, quàm ſecunda poteſtas
lp: ideoque ſimiliter etiam *ep*, non minor, quàm
ſecunda poteſtas *pr*: & *er*, non minor, quàm ſe-
cunda poteſtas *rt*: & *et*, non minor, quàm ſecun-
47. b. da poteſtas *tx*. Itaque ſicut demonſtratum eſt,
quod

46. b. *fg* (*ef*)+*gm* (*eg*): minor eſt, quàm *fm* (*ef*).

2. b. *mh* (*eg*)+*hn* (*eh*): minor, quàm *mn* (*eh*).

2. b. *ni* (*eh*)+*io* (*ei*): minor, quàm *no* (*en*).

2. b. *oK* (*ei*)+*Kl* (*eK*): minor, quàm *ol* (*eo*).

Sic

m n o q s u

c--20--f.... . ...l.... . ...y

g h i K p r t x

Sic demonſtrabitur, quòd

46. b. *lp*(*el*)+*pq*(*ep*) minor eſt, quàm *lq* (*el*).

2. b. *qr* (*ep*)+*rs* (*er*) minor, quàm *qs* (*eq*).

2. b. *st* (*er*)+*tu* (*et*) minor, quàm *su* (*es*).

2. b. *ux* (*et*)+*xy* (*ex*) minor, quàm *uy* (*eu*).

47. b. Item ſicut demonſtratum eſt, quòd

fg(*ef*), *gm*+*mh* (*eg*), *hn*+*ni* (*eh*), *io*+*ok* (*ei*), *Kl* (*ek*).

componunt primum prologarithmum ſeriei *C*: & quòd

fm (*ef*), *mn* (*em*), *no* (*en*), *ol* (*eo*), componunt primum ſeriei *A*. ſic

lp(*el*), *pq*+*qr*(*ep*), *rs*+*st*(*er*), *tu*+*ux*(*et*), *xy*(*ex*), componunt ſecũdum prologarithmum ſeriei *C*: &

lq (*el*), *qs* (*eq*), *su* (*es*), *uy* (*eu*), componunt ſe-

47. b. cundum ſeriei *A*. Et omninò ſicut primus ſeriei

def. 8. b. *C*, perſpectè eſt minor primo ſeriei *A*: ita ſecundus prologarithmus, eſt perſpectè minor ſecundo. Quod &c.

Similiter oſtendetur, quod & tertius tertio, & quartus quarto, ſunt perſpectè minores: & quod quiſque prologarithmus ſeriei *C*; peſpectè minor eſt, æqueordinato prologarithmo ſeriei *A*.

Quare &c.

Theor. 50. *Prop.* 50.

HYperlogarithmi rationum duplę, & ſuperparticularium, quò ſunt, minores inter terminos, eò ſunt minores.

Præpar.

Eſto *A*, ſeries harmonica naturalis: & ordinentur *B*, *C*, *D*, ſeries prologarithmorum; *B* quidem, ex binis à ſecundo; *C*, ex ternis à tertio; *D*, ex quaternis à quarto; & ſic deinceps, à quotoquolibet, ex totenis.

Demonſtr.

def.12.b Nam in ſerie arithmetica naturali, ratio ſubdupla, eſt inter minimos terminos, primum, & ſecundum; deinde inter maiores, ordinatim multi- (21. 7.) plos minimorum; videlicet inter ſecundum, & (19. b.) quartum; inter tertium, & ſextum; inter quartum, octauum. Ergo reciprocè, in ſerie harmonica na- (24. b.) turali, ratio dupla, eſt inter maximos terminos, (def.20 b) primum, & ſecundum; deinde inter minores ordinatim ſubmultiplos maximorum; videlicet inter ſecundum, & quartum; inter tertium, & ſextum; inter quartum, & octauum. Ergo rationis duplę, (def.22 b) inter maximos terminos primum, & ſecundum, hyperlogarithmus, eſt primus terminus ſeriei *A*, nempe vnitas. deinde inter minores terminos ſecundum, & quartum, hyperlogarithmus, eſt primus prologarithmus ſeriei *B*, ex duobus à ſecundo, nempe ex ſecundo, & tertio. & inter tertium,

& ſextum, minores adhuc terminos, hyperlogarithmus, eſt primus prologarithmus ſeriei *C*, ex tribus à tertio, nempe ex tertio, quarto, & quinto. Et deinceps inter minores terminos quartum, & octauum, hyperlogarithmus, eſt primus prologarithmus ſeriei *D*, ex quatuor à quarto, nempe
47. *h.* ex quarto, quinto ſexto, & ſeptimo. Sed huiuſmodi primorum prologarithmorum, minor eſt qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo hyperlogarithmorum duplæ rationis minor eſt, qui minores inter eſt terminos, quàm qui inter maiores. Quod &c.

Rurſum in ſerie arithmetica naturali, ratio ſubſeſquialtera, eſt inter minimos terminos, ſecun-
26. *h.* dum, & tertium; deinde inter maiores, ordinatim
12. 7. multiplos minimorum; videlicet inter quartum, &
19. *h.* ſextum; inter ſextum, & nonum; inter octauum,
24. *h.* & duodecimum. Ergo reciprocè in ſerie harmonica naturali, ratio ſeſquialtera eſt inter maximos terminos, ſecundum, & tertium; deinde inter minores, ſubmultiplos maximorum, quartum, & ſextum; & inter minores, ſextum, & nonum; & ad-
def. 22 *h* huc inter minores, octauum, & duodecimum. Ergo rationis ſeſquialteræ inter maximos terminos, ſecundum, & tertium, hyperlogarithmus, eſt ſecundus ſeriei *A*. deinde inter minores, quartum, & ſextum, hyperlogarithmus, eſt ſecundus prologa-

logarithmus ſeriei *B*, ex duobus à quarto, nempe ex quarto, & quinto. & inter ſextum, & nonum, adhuc minores, hyperlogarithmus, eſt ſecundus ſeriei *C*, ex tribus à ſexto, nempe ex ſexto, ſeptimo, & octauo. & inter octauum, & duodecimum, adhuc minores, hyperlogarithmus, eſt ſecundus ſeriei *D*, ex quatuor ab octauo, nempe ex octauo,
49. h. nono, decimo, & vndecimo. Sed in ſeriebus huiuſmodi, ſecundorum prologarithmorum, minor eſt, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo ſeſquialteræ rationis hyperlogarithmorum minor eſt, qui minores inter terminos, quàm qui eſt inter maiores. Quod &c.

Similiter prorſus demonſtratione oſtendetur, de ſeſquitertia ratione, adhibitis tertijs prologarithmis earumdem ſerierum: & de ſeſqui quarta, adhibitis quartis prologarithmis: & de omni ſuperparticulari ratione.

Quare &c.

Theor. 51. Propoſ. 51.

OMnis ratio multipla, vel eſt dupla, vel ex dupla & ſuperparticularibus compoſita.

Demonſtr.

Nam tripla 3 ad 1, ex ſeſquialtera, 3 ad 2, &
def.5.6. dupla, 2 ad 1, componitur: quadrupla, 4 ad 1, ex ſeſquitertia, 4 ad 3, ſeſquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1: quintupla, 5 ad 1, ex ſeſquiquarta, 5

 ad 4,

ad 4, ſeſquitertia, 4 ad 3, ſeſquialtera, 3 ad 2, & dupla, 2 ad 1. Et ſic de reliquis.

Quare &c.

Theor. 52. *Prop.* 52.

OMnis ratio numeroſa, ex ſuperparticularibus componitur.

Hypoth.

Eſto ratio numeroſa *a* ad *b*.

Dico *a* ad *b* rationem ex ſuperparticularibus eſſe compoſitam.

Præpar.

Aſſumantur numeri 8, 5, eamdem inter ſe rationem habentes *a* ad *b*. & inter 8, & 5. medij numeri. 7. 6.

Demonſtr.

def.5.6. Ratio 8 ad 5 ex rationibus 8 ad 7, 7 ad 6, 6 ad 5, componitur. Sed 8 ad 7, ratio numeri ad numerum vnitate minorem, eſt ſuperparticularis, item 7 ad 6, 6 ad 5, ſunt rationes ſuperparticulares: ergo ratio numeroſa, 8 ad 5, vel *a* ad *b*, ex rationibus ſuperparticularibus componitur. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 53. *Prop.* 53.

QVotcunque terminorum, è ſerie harmonica naturali, ordine quantitatis acceptorum, hyperlogarithmus

rithmus rationis compoſitæ inter extremos, componitur ex hype rlogarithmus rationum componentium, inter extremos, & medios. & hypologarithmus ex hypologarithmis. *Hypoth.*

In ſerie harmonica naturali, ſint tres termini *a*, *b*, *c*: & eſto *a*, maior, quàm *b*; & *b*, maior, quàm *c*.

Dico rationis *a* ad *c*, inter terminos *a*, *c*, hyperlogarithmum, ex, rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b*, & rationis *b* ad *c*, inter *b*, *c*, hyperlogarithmis componi.

Et hypologarithmum, ex hypologarithmis.

Præpar.

Sumantur inter terminos *a*, *b*, omnes medij in ſerie harmonica naturali: necnon inter *b*, *c*. & ſint inter *a*, *c* termini.

a g h i b K l m n c

Demonſtr.

Hyperlogarithmus rationis *a* ad *b*, inter terminos *a*, *b*, eſt *a+g+h+i*. Hyperlogarithmus rationis *b* ad *c*, inter terminos *b*, *c*, eſt *b+K+l+m+n*. Hyperlogarithmus rationis *a* ad *c*, inter terminos *a*, *c*, eſt *a+g+h+i+b+K+l+m+n*. ex vtrarumque rationum *a* ad *b*; & *b* ad *c*, hyperlogarithmis, inter eoſdem terminos compoſitus. Quod &c.

Item rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b*, hypologarithmus eſt, *g+h+i+b*: & rationis *b* ad *c*, inter *b*, *c*, eſt *K+l+m+n+c*: & rationis *a* ad *c*, eſt *g+h+i+b+K+l+m+n+c*. ex vtriſque compoſitus. Quod &c. Quare &c.

Theor. 54. *Prop.* 54.

CViuſque numeroſæ rationis hyperlogarithmi, quò ſunt, minores inter terminos, eò ſunt minores.

Hypoth.

Eſto numeroſa ratio inter ſeriei harmonicæ terminos ab vnitate, maiores 1(3*a*), 1(3*b*), & deinde inter minores 1(4*a*), 1(4*b*).

Dico inter 1(4*a*), 1(4*b*), minorem eſſe hyperlogarithmum, quàm inter 1(3*a*), 1(3*b*).

Præpar.

Aſſumantur minimi numeri in eadem ratione
21. 7. *a*, *b*: & deinceps maiores, nempe dupli, tripli,
27. *b*. quadrupli, donec inueniãtur denominatores propoſitorum terminorum, 3*a*, 3*b*, 4*a*, 4*b*. Deinde inter *a*, *b* ordinentur omnes medij, in ſerie arithmetica naturali, quorum deinceps ſupparticulares ſunt rationes, *a*, *c*, *d*, *b*; & eorum æquemulti-
15. 5. pli 3*a*, 3*c*, 3*d*, 3*b*, eaſdem ſupparticulares habentes rationes deinceps; necnon & æquemultipli eaſdem habentes rationes 4*a*, 4*c*, 4*d*, 4*b*. Sumantur denique in ſerie harmonica termini, ab his denominati 1(3*a*), 1(3*c*), 1(3*d*), 1(3*b*): & 1(4*a*), 1(4*c*), 1(4*d*), 1(4*b*).

Demonſtr.

24. *b*. Terminorum 1(4*a*), 1(4*c*), 1(4*d*), 1(4*b*) rationes deinceps, necnõ terminorum 1(3*a*), 1(3*c*), 1(3*d*), 1(3*b*), reciprocè ſunt eędem, quæ termi-

norum

norum 4*a*, 4*c*, 4*d*; 4*b*, necnon 3*a*, 3*c*, 3*d*, 3*b*:
50. *b*. ideſt, eædem ſuperparticulares. Quarum rationis inter 1(4*a*), 1(4*c*), minor eſt hyperlogarithmus, quàm inter 1(3*a*), 1(3*c*): & inter 1(4*c*), 1(4*d*), minor, quàm inter 1(3*c*), 1(3*d*): & inter 1(4*d*), 1(4*b*),
53. *h*. minor, quàm inter 1(3*d*), 1(3*b*). Et ex minoribus hyperlogarithmis, minor eſt hyperlogarithmus compoſitus, rationis compoſitæ inter extremos 1(4*a*), 1(4*b*), quàm ex maioribus, inter extremos 1(3*a*), 1(3*b*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 55. Prop. 55.

HYperlogarithmi rationum duplæ, & ſuperparticularium, quò ſunt, minores inter terminos, eò ſunt maiores.

Præpar.

Eſto *A* ſeries harmonica naturalis: & ordinentur *B*, *C*, *D*, ſeries prologarithmorum ab vnitate; *B* quidem, ex binis; *C*, ex ternis; *D*, ex quaternis; & ſic deinceps.

Demonſt.

def. 12. *b* Nam in ſerie arithmetica naturali, ratio ſubdupla eſt inter minimos terminos, primum, & ſecun-
21. 7. dum; deinde inter maiores, ordinatim multiplos
19. *b*. minimorum; videlicet inter ſecūdum, & quartum;
24. *b*. inter tertium, & ſextum; inter quartum, & octauū.
def. 20 *b* Ergo reciprocè in ſerie harmonica naturali, ratio

dupla

dupla eſt inter maximos terminos, primum, & ſecundum; deinde inter minores ordinatim ſubmultiplos maximorum; videlicet, inter ſecundum, & quartum; inter tertium, & ſextum; inter quartum,
def.23b & octauum. Ergo rationis duplæ, inter maximos terminos primũ, & ſecundum, hypologarithmus, eſt ſecundus terminus ſeriei *A*, nempe 1(2). deinde inter minores terminos ſecundum, & quartum, hypologarithmus, eſt ſecundus prologarithmus ſeriei *B*, ex duobus à tertio, nempe ex tertio, & quarto: & inter tertium, & ſextum, minores adhuc terminos hypologarithmus, eſt ſecundus prologarithmus ſeriei *C*, ex tribus à quarto, nempe ex quarto, quinto, & ſexto. & deinceps inter minores terminos, quartum, & octauum, hypologarithmus, eſt ſecundus prologarithmus ſeriei *D*, ex quatuor à quinto, nempe ex quinto ſexto,
48. b. ſeptimo, & octauo. Sed huiuſmodi ſecundorum prologarithmorum, maior eſt, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo hypologarithmorum duplę rationis maior eſt, qui minores inter eſt terminos, quàm qui inter maiores. Quod &c.

Rurſum in ſerie arithmetica naturali, ratio ſub-
26. b. ſeſquialtera, eſt inter minimos terminos, ſecun-
21. 7. dum, & tertium; deinde inter maiores, ordinatim
19. b. multiplos minimorum; videlicet, inter quartum, & ſex-

& ſextum; inter ſextum,& nonum; inter octauum,
24. h. & duodecimum. Ergo reciprocè in ſerie harmonica naturali, ratio ſeſquialtera eſt inter maximos terminos, ſecundum, & tertium; deinde inter minores, ſubmultiplos maximorum, quartum, & ſextum; & inter minores ſextum, & nonum; & adhuc inter minores octauum, & duodecimum.
def.23b Ergo rationis ſeſquialteræ inter maximos terminos, ſecundum, & tertium, hypologarithmus, eſt tertius ſeriei *A.* deinde inter minores, quartum,& ſextum, hypologarithmus, eſt tertius prologarithmus ſeriei *B*, ex duobus à quinto, nempe ex quinto, & ſexto. & inter ſextum,& nonum, adhuc minores terminos, hypologarithmus eſt tertius ſeriei *C*, ex tribus à ſeptimo, nempe ex ſeptimo, octauo,& nono. & inter octauum,& duodecimum adhuc minores, hypologarithmus, eſt terutis ſeriei *D*, ex quatuor à nono, nempe ex nono, decimo, vndecimo, & duodecimo. Sed in ſeriebus
48. h. huiuſmodi, tertiorum prologarithmorum, maior eſt, qui ex pluribus, quàm qui ex paucioribus terminis. Ergo ſeſquialteræ rationis hypologarithmorum, maior eſt, qui minores inter terminos, quàm qui eſt inter maiores. Quod &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur; de ſeſquitertia ratione, adhibitis quartis prologarithmis earumdem ſerierum: & de ſeſquiquarta, adhibitis quintis prologa-

rithmis: & de omni ſuperparticulari ratione.

Quare &c.

Theor. 56. Propoſ. 56.

CViuſque numeroſæ rationis hypologarithmi, quò ſunt, minores inter terminos, eò ſunt maiores.

Hypoth.

Eſto numeroſa ratio inter ſeriei harmonicæ naturalis terminos ab vnitate, maiores 1(3*a*), 1(3*b*), & deinde inter minores 1(4*a*), 1(4*b*).

Dico inter 1(4*a*), 1(4*b*), maiorem eſſe hypologarithmum, quàm inter 1(3*a*), 1(3*b*).

Præpar.

Aſſumantur minimi numeri in eodem *ratione* *a*, *b*: & inter minimos, medij omnes *c*, *d*: quorum terminorum *a*, *c*, *d*, *b*, rationes deinceps ſunt ſupparticulares; aſſumantur & eorum multipli, do-
27. *h.* nec propoſitorum terminorum denominatores
15. 5. inueniantur, 3*a*, 3*c*, 3*d*, 3*b*, & 4*a*, 4*c*, 4*d*, 4*b*, eaſdem ſupparticulares habẽtes rationes deinceps. Sumantur denique in ſerie harmonica, termini ab his denominati 1(3*a*), 1(3*c*), 1(3*d*), 1(3*b*), &
24. *b.* 1(4*a*), 1(4*c*), 1(4*d*), 1(4*b*): quorum rationes deinceps, reciprocè ſunt eędem, & ſuperparticulares.

Demonſtr.

55. *h.* Inter 1(4*a*), 1(4*c*), maior eſt hypologarithmus, quàm inter 1(3*a*), 1(3*c*): & inter 1(4*c*),

1(4*d*),

1(4*d*), maior, quàm inter 1(3*c*), 1(3*d*): & inter 1(4*d*), 1(4*b*), maior, quàm inter 1(3*d*), 1(3*b*).

53. *h.* Et ex maioribus hypologarithmis, maior eſt hypologarithmus compoſitus, rationis compoſitæ, inter extremos 1(4*a*), 1(4*b*), quàm ex minoribus, inter extremos 1(3*a*), 1(3*b*). Quod &c.

Quare &c.

Theor. 57. Prop. 57.

EIuſdem rationis, inter eoſdem terminos, hyperlogarithmus hypologarithmo eſt maior.

Hypoth.

Sint in ſerie harmonica naturali ab vnitate, termini *a*, *b*: & eſto *a* prior, quàm *b*.

Dico rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b* terminos, hyperlogarithmum hypologarithmo maiorem eſſe.

Præpar.

Inter *a*, *b*, ſumantur medij omnes in ſerie harmonica, quorum ſumma *c*.

Demonſt.

hypoth. *a*: prior, quàm *b*.

27. *h.* *a*: maior, quàm *b*.

$a+c$: maior, quàm $c+b$.

def. 22h $a+c$: hyperlogarithmus.

def. 23h $c+b$: hypologarithmus.

Ergo rationis *a* ad *b*, inter *a*, *b* terminos, hyperlogarithmus, eſt maior hypologarithmo. Quod &c. Quare &c.

Theor. 58. Prop. 58.

EIuſdem rationis inter quoſcunque terminos, hyperlogarithmus hypologarithmo eſt maior.

Hypoth. comm.

In ſerie harmonica naturali ab vnitate, ſunto termini proportionales *a* ad *b*, vt *c* ad *d*.

Dico inter *a*, *b* hypologarithmum, hypologarithmo inter *c*, *d*, maiorem eſſe.

Hypoth. p. caſ.

Eſto *a*, maior, quàm *c*.

Demonſtr.

14. 5. Quoniam *a*, maior eſt, quàm *c*; etiam *b*, ma-
54. *h*. ior eſt, quàm *d*: & inter *a*, *b*, maior eſt hyperlo-
58. *h*. garithmus, quàm inter *c*, *d*: ſed inter *c*, *d*, hyperlogarithmus hypologarithmo eſt maior: ergo inter *a*, *b* hyperlogarithmus, hypologarithmo inter *c*, *d*, eſt maior. Quod &c.

Hypoth. 2. caſ.

Eſto *a*, minor, quàm *c*.

Demonſtr.

14. 5. Quoniam *a*, minor eſt, quàm *c*; etiam *b* mi-
58. *h*. nor eſt, quàm *d*: & inter *a*, *b*, hyperlogarithmus
55. *h*. hypologarithmo eſt maior: hypologarithmus autem inter *a*, *b*, hypologarithmo inter *c*, *d*, eſt maior. Ergo inter *a*, *b* hyperlogarithmus, hypologarithmo inter *c*, *d*, eſt maior. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 1. *Prop.* 59.

DAta ratione, terminos inuenire cuiuſpiam determinatæ rationis numeroſæ, in ſerie harmonica naturali ab vnitate, quos inter hypologarithmus ad vltimum, maior eſt, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & ſit determinata ratio numeroſa *c* ad *d*.

Oportet inuenire in ſerie harmonica naturali ab vnitate, terminos proportionales, vt *c* ad *d*: quos inter hypologarithmus ad vltimum eorum, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*.

Conſtr.

Rationis *c* ad *d*, minimi numeri inueniantur *c*, *d*: & eſto *c* minor, quàm *d*; cuius defectus *e*: & inueniatur *f* multiplex ipſius *e*, & maior ad vnitatem, quàm vt *a* ad *b*: & quotuplex eſt *f* ad *e*, totus numerus accipiatur *g*: per quem multiplicentur *c*, *d*, termini, & fiant *gc*, *gd* producti: quibus denominatæ ſumantur vnitates in ſerie harmonica naturali, 1(*gc*), 1(*gd*).

Dico inter 1(*gc*), 1(*gd*) hypologarithmum ad 1(*gd*), maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*.

Demonſtr.

9. *b.* | Quoniam *c*, minor eſt, quàm *d*: & *gc*, minor
12. *b.* | quàm *gd*: ergo reciprocè 1(*gc*) maior eſt, quàm
*def.*19.*b* | 1(*gd*): & ſinguli medij harmonici inter 1(*gc*), 1-
p. 3. | (*gd*), ſunt maiores, quàm 1 (*gd*): & ſimul omnes

ad

ad 1 (*gd*) maiores ſunt, quàm vt eorum multitudo ad vnitatem. & componendo hypologarithmus inter 1(*gc*), 1(*gd*), maior eſt ad 1 (*gd*), quàm vt eius multitudo terminorum ad vnitatem.
p. 3.

44. *h.* Termini autem ſeriei harmonicę ab vnitate incluſiuè, vſqne ad 1 (*gd*) incluſiuè, tot ſunt, quotus eſt *gd*: & vſque ad 1 (*gc*) incluſiuè, quotus eſt, *gc*: & ab 1 (*gc*) excluſiuè, vſque ad 1 (*gd*) incluſiuè,
30. *h.* tot, quotus eſt, *gd* --- *gc*. Sed *d* --- *c*, eſt *e*: & *gd* --- *gc*, eſt *ge*: & *g* multiplicans *e*, facit *f*. Ergo termini ab 1 (*gc*) excluſiuè, vſque ad 1 (*gd*) incluſiuè, tot ſunt, quotus eſt *f*. Sed termini ab 1 (*gc*)
def. 23 h excluſiuè, vſque ad 1 (*gd*) incluſiuè, componunt hypologarithmum inter 1 (*gc*), 1 (*gd*): ergo multitudo terminorum hypologarithmi inter 1 (*gc*),
conſtr. 1 (*gd*), eſt *f*. Sed *f* ad vnitatem maior eſt, quàm vt *a* ad *b*. Ergo hypologarithmus inter 1 (*gc*), 1 (*gd*), ad 1 (*gd*), maior eſt, quàm vt *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 2. Prop. 60.

DAta ratione, terminos inuenire cuiuſpiam determinatæ rationis numeroſæ, in ſerie harmonica naturali ab vnitate, quos inter hyperlogarithmus ad primum maior eſt, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio *a* ad *b*: & ſit determinata ratio numeroſa *c* ad *d*: & eſto *c*, minor, quàm *d*.

Oportet inuenire, in ſerie harmonica naturali ab vnitate, terminos proportionales vt *c* ad *d*: quos inter hyperlogarithmus ad primum eorum, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*.

Conſtr.

59. *h.* | Fiat vt *d* ad *c*, ita *b* ad *e*: & inueniantur termini in ſerie harmonica naturali ab vnitate, proportionales *f* ad *g*, vt *d* ad *c*; inter quos hypologarithmus, maior ſit ad *g*, quàm vt *a* ad *e*.

Dico inter *f*, *g* hyperlogarithmum, ad *f*, maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*.

Demonſtr.

conſtr. | Inter *f*, *g* hypologarithmus, ad *g*, maior eſt,
conſtr. | quàm vt *a* ad *e*: *g* ad *f*, eſt vt *e* ad *b*: ergo inter
4. 3. | *f*, *g* hypologarithmus, ad *f*, maior eſt, quàm vt
57. *h.* | *a* ad *b*. Sed inter *f*, *g* hyperlogarithmus hypo-
8. 5. | logarithmo eſt maior; maioremque habet ad *f* ra-
13. 5. | tionem: ergo inter *f*, *g* hyperlogarithmus, ad *f*, maior eſt, quàm vt *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 3. *Prop.* 61.

DAtis duabus numeroſis, & non æquealtis rationibus, vtriſque maioris, vel vtriſque minoris inæquali-

qualitatis: iuuenire in ſerie harmonica naturali, terminos duarum rationum, vt hypologarithmus altioris, maior ſit hyperlogarithmo depreſſioris.

Hypoth.

Sint duæ rationes numeroſæ, vtræque maioris, vel vtræque minoris inæqualitatis, *A* altior, *B* depreſſior.

Oportet in ſerie harmonica naturali, terminos inueni-re vtrarúmque, vt hypologarithmus *A*, ſit maior hy-perlogarithmo *B*.

Conſtr.

35.7. Inueniantur *c*, *d*, minimi numeri numeroſæ
35.7. rationis *A*: quorum *c*, minor, quàm *d*. Item inueniantur *e*, *f*, minimi numeroſæ rationis *B*:
def.28.b quorum *e*, minor, quàm *f*. Fiat ex *c*, *e* pro-

A			*B*	
c	*d*		*e*	*f*
ce		*cf*	*g*	*de*
cef	*eg*	*cf*2	*fg*	*def*
1(*cef*)	1(*eg*)		1(*fg*)	1(*def*)

9.b. ductus *ce*: & vt *c* ad *d*, ita *ce* ad *de*: & vt *e* ad *f*, ita *ce* ad *cf*. Et quoniam altior eſt *A*, quàm *B*; ideſt, *c* ad *d*, quàm *e* ad *f*; ideſt, *ce* ad *de*, quàm *ce* ad *cf*. & ſunt minoris inæqualitatis.
def.p.4. ergo *ce* minor eſt ad *de*, quàm ad *cf*. Ergo *cf*,
10.5. minor eſt, quàm *de*. Sumatur inter *cf*, *de* me-dius quilibet numerus *g*. & multiplicentur om-
def.28.b nes *ce*, *cf*, *g*, *de*, communiter per *f*: & ſint

pro-

def.28b producti *cef*, *cf2*, *fg*, *def*. necnon multiplicetur
9. h. *g*, per *e*: & ſit productus *eg*. Et quoniã *cef* ad *cf2*, eſt
11. 5. vt *e* ad *f*: item *eg* ad *fg*, eſt vt *e* ad *f*: ergo *cef* ad *cf2*,
conſtr. eſt vt *eg* ad *fg*. Eſt autem *cf*, minor, quàm *g*: er-
14. 5. go *cf2*, minor eſt, quàm *fg*: ergo *cef*, minor eſt,
quam *eg*: ergo ſunt quatuor numeri, hoc ordine,
cef, *eg*, *fg*, *def*, priores minores poſterioribus; à
27. *h.* quibus denominatæ vnitates 1(*cef*), 1(*ge*), 1(*fg*),
1(*def*), ſunt in ſerie harmonica naturali ab vnita-
24. *h.* te, hoc ordine, priores maiores poſterioribus. &
24. & eſt 1(*cef*) ad 1(*def*), vt *d* ad *c*; & 1(*eg*) ad 1-
9. *h.* (*fg*), vt *f* ad *e*.

Dico hypologarithmum inter terminos 1(*cef*), 1(*def*), maiorẽ eſſe hyperlogarithmo inter terminos 1(*eg*), 1(*fg*).

Demonſtr.

def.23b Nam hypologarithmus inter terminos 1(*cef*),
1(*def*), ex 1(*eg*), ex 1(*fg*), & ex omnibus inter-
def.22b medijs, alijſque terminis componitur: hyperloga-
rithmus verò inter 1(*eg*), 1(*fg*), ex 1(*eg*), & ex
intermedijs terminis, vſque ad 1(*fg*) excluſiuè,
componitur. Ergo hyperlogarithmus inter 1-
(*cef*), 1(*def*), maior eſt hyperlogarithmo inter
1(*eg*), 1(*fg*). Quod &c. Quare &c.

Probl. 4. Prop. 62.

DAta qualibet ratione inæqualitatis, inuenire in ſerie harmonica naturali ab vnitate, terminos determi-

 natam

natam habentes rationem inter quos hyperlogarithmus ad hypologarithmum propior eſt æqualitati, quàm in data ratione.

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*: & ſit determinata quædam ratio C.

Oportet inuenire terminos in ſerie harmonica naturali ab vnitate, habentes eamdem *C* rationem; inter quos hyperlogarithmus ad hypologarithmum eſt propior æqualitati, quàm vt *a* ad *b*.

Conſtr.

60. *b.* | Eſto *a* maior quàm *b*. & inueniantur in ſerie harmonica naturali ab vnitate, termini, prior *d*, poſterior *e*; inter quos hyperlogarithmus ad priorem *d*, maior eſt, quàm vt *a* ad *a*---*b*.

Dico inter *d*, *e* hyperlogarithmum ad hypologarithmum, maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*; maiorem, quàm vt *b* ad *a*.

Præpar.

Inter *d*, *e*, aſſumatur mediorum omnium harmonicorum ſumma *f*.

Demonſtr.

deff. 22. & 23 *b.* | Inter *d*, *e* hyperlogarithmus eſt *d*+*f*; & hy-
conſtr. | pologarithmus *f*+*e*: & eſt *d*+*f* ad *d*, maior, quàm
3. 3. | vt *a* ad *a*---*b*: & per conuerſionem rationis, *d*
8. 5. | +*f* ad *f*, minor, quàm vt *a* ad *b*. Sed *d*+*f* ad *f*
13. 5. | +*e*, minor eſt, quàm vt *d*+*f* ad *f*. Ergo *d*+*f* ad

f+*e*,

f+*e*, minor eſt, quàm vt *a* ad *b*. Ergo inter *d*, *e* hyperlogarithmus ad hypologarithmum, minor eſt, quàm vt *a* ad *b*. Quod &c.

58. b. Et eſt hyperlogarithmus hypologarithmo
38. 5. maior: *b* autem, minor, quàm *a*. Ergo hyperlogarithmus ad hypologarithmum maior eſt, quàm vt *b* ad *a*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 59. Prop. 63.

SI ſuerit prima ad ſecundam, minor, quàm vt tertia ad quartam; fuerit autem prima, quàm tertia, maior: erit & ſecunda, quàm quarta, maior.

Demonſtr.

8. 5. Nam ſi eſſet ſecunda æqualis quartæ: eſſet prima ad ſecundam, maior, quàm vt tertia ad quar-
8. 5. tam: contra hypotheſim. Quòd ſi ſecunda eſſet
8. 5. minor, quàm quarta: eſſet prima ad ſecundam, maior, quàm vt ad quartam: prima autem ad quar-
13. 5. tam, maior eſt, quàm vt tertia ad quartam: eſſet ergo prima ad ſecundam, maior, quàm vt tertia ad quartam; contra hypotheſim. Eſt ergo ſecunda, quàm quarta maior. Quod &c. Quare &c.

Theor. 60. Prop. 64.

SI fuerit prima ad ſecundam, maior, quàm vt tertia ad quartam; fuerit autem prima, quàm tertia minor:

erit & ſecunda, quàm quarta, minor.

Demonſtr.

8. 5. Nam ſi eſſet ſecunda æqualis quartæ: eſſet prima ad ſecundam minor, quàm vt tertia ad quartam. contra hypotheſim. Quòd ſi ſecunda eſſet
8. 5. maior, quàm quarta: eſſet prima ad ſecundam,
8. 5. minor, quàm vt ad quartam: prima autē ad quar-
13. 5. tam, minor eſt, quàm vt tertia ad quartam: eſſet ergo prima ad ſecundam, minor, quàm vt tertia ad quartam. contra hypotheſim. Eſt ergo ſecunda, quàm quarta; minor.

Quare &c.

Theor. 61. Prop. 65.

EArumdem numeroſarum rationum vna tantùm quantitas eſt logarithmus.

Hypoth.

Sunto duæ quantitates inæquales *a*, *b*: & eſto *a*, logarithmus rationis C.

Dico *b* non eſſe logarithmum rationis C.

Præpar.

Sumātur eiuſdem rationis C, hyperlogarithmus
62. *b*. *d*, & hypologarithmus *e*, propiores æqualitati, quàm vt *a* ad *b*.

Demonſtr.

57. *b*. *d*: maior quàm *e*.

Si *a*, maior eſt, quàm *b*.

d; *e*.

conſtr. | *d*; *e*: minor, quàm *a*; *b*.
def.24b | *d*: maior, quàm *a*.
63. b. | *e*: maior, quàm *b*.
def.24b | *b*, non eſt logarithmus rationis *C*. Quod &c.
Si *a*, minor eſt, quàm *b*.
conſtr. | *e*; *d*: maior, quàm *a*; *b*.
def.24b | *e*: minor, quàm *a*.
64. b. | *d*: minor, quàm *b*.
def.24b | *b*, non eſt logarithmus rationis *C*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 62. Prop. 66.

DEterminatæ numeroſæ rationis hypologarithmi ad vltimum terminum, & hyperlogarithmi ad primum, ſunt rationes quaſi infinitæ.

Demonſtr.

59. b. Poſſunt enim inueniri cuiuſque determinatę rationis numeroſæ termini in ſerie harmonica naturali ab vnitate, quorum ad vltimum, hypologarithmus maior eſt, quàm in data quacunque ratio-
60. b. ne: item, quorum ad primum, hyperlogarithmus maior eſt, quàm in data quacunque ratione. Qua-
def.p.3. re hypologarithmi ad vltimum terminum, & hyperlogarithmi ad primum, ratio quaſi eſt infinita.

Theor.

Theor. 63. Propoſ. 67.

SI trium inæqualium quantitatum, maxima, & minima, ſuerint propiores æqualitati, quàm data ratio inæqualitatis: etiam maxima, & media; media, & minima, erunt propiores æqualitati, quàm data eadem ratio.

Hypoth.

Sint inæquales quantitates *a*, *b*, *c*; maxima quidem *a*, minima *c*: & ſit data ratio inæqualitatis *d* ad *e*; cuius maior terminus *d*, minor *e*: & ſit *a* ad *c*, propior æqualitati, quàm *d* ad *e*.

Dico *a*; *b*, & *b*; *c*: propiores æqualitati, quàm *d*; *e*:

Demonſtr.

hypoth.	*a*; *c*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*.
def.3.3.	*a*; *c*: minor, quàm *d*; *e*. & *c*; *a*: maior, quàm *e*; *d*.
8. 5.	*a*; *b*: minor, quàm *a*; *c*. & *b*; *a*: maior, quàm *c*; *a*.
13. 5.	*a*; *b*: minor, quàm *d*; *e*. & *b*; *a*: maior, quàm *e*; *d*.
def.3.3.	*a*; *b*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*. Quod &c.
8. 5.	*b*; *c*: minor, quàm *a*; *c*. & *c*; *b*: maior, quàm *c*; *a*.
13. 5.	*b*; *c*: minor, quàm *d*; *e*. & *c*; *b*: maior, quàm *e*; *d*.
def.3.3.	*b*; *c*: propior æqualitati, quàm *d*; *e*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 5. Prop. 68.

DAta qualibet ratione inæqualitatis, inuenire cuiuſdam determinatæ rationis hyperlogarithmos, & hypologarithmos ad inuicem, & ad logarithmum propiores æqualitati, quàm in data ratione.

Hy-

Hypoth.

Sit data ratio inæqualitatis *a* ad *b*; cuius maior terminus *a*, minor *b*: & ſit determinata quædam ratio *C*.

Oportet inuenire hyperlogarithmos, & hypologarithmos ad inuicem, & ad logarithmum rationis *C*, propiores æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*.

Conſtr.

62. *b*. Inueniantur in ſerie harmonica naturali ab vnitate duo termini *d*, *e*, habentes eamdem rationem *C*; inter quos hyperlogarithmus *f*, ad hypologarithmum *g*, ſit propior æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*. Sumanturque minores termini quàm *d*, *e*, eamdem habentes rationem *C*; inter quos eſto hyperlogarithmus *h*; & eſto hypologarithmus *i*: & eiuſdem rationis *C*, eſto logarithmus *k*.

Dico *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, propiores eſſe æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*.

Demonſtr.

54. *b*. *f*: maior eſt, quàm *h*.
def. 24 *b* *h*: maior, quàm *k*.
def. 24 *b* *k*: maior, quàm *i*.
56. *b*. *i*: maior, quàm *g*.
conſtr. *f*; *g*: propior æqualitati, quàm *a*; *b*.
67. *b*. *f*, *h*, *k*, *i*, *g*, propiores æqualitati, quàm in ratione *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 64. Prop. 69.

EIuſdem rationis hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus, quaſi ſunt æquales.

Demonſtr.

68. h. Poſſunt enim inueniri eiuſdem rationis hyperlogarithmi, & hypologarithmi, & ad inuicem, & ad logarithmum propiores æqualitati, quàm in
def. 3. 3. data qualibet ratione inæqualitatis. Quare eiuſdem rationis hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus, quaſi ſunt æquales.

Theor. 65. Prop. 70.

ÆQuealtarum numeroſarum rationum, ęquales ſunt logarithmi.

Demonſtr.

65. h. Earumdem enim numeroſarum rationum, vna tantùm quantitas, eſt logarithmus. Sed æquealtæ, ſunt eædem inter ſe. nam ſi non eſſent eędem, cum vel vtraque ſit maioris, vel vtraque minoris inęqualitatis; vtrarumque maioris, quę minor eſſet, vel vtrarumque minoris inæqualitatis, quæ maior eſſet, propior eſſet æqualitati: & non eſſent inter ſe æquealtæ; contra hypotheſim. Ergo etiam æquealtarum rationum, vna tantùm quantitas eſt logarithmus.

Quare &c.

Theo-

Theor. 66. Prop. 71.

NVmeroſarum rationum, altioris, maior eſt logarithmus, & depreſſioris, minor.

Hypoth.

Sunto numeroſæ rationes, *A* altior, *B* depreſſior: & eſto ipſius *A*, logarithmus *a*; & ipſius *B*, logarithmus *b*.

Dico *a*, maiorem eſſe, quàm *b*.

Præpar.

61. b. | Inueniatur *c*, hypologarithmus rationis *A*; & *d*, hyperlogarithmus rationis *B*; vt ſit *c*, maior, quàm *d*.

Demonſtr.

def. 24 h | *a*: maior, quàm *c*.
conſtr. | *c*: maior, quàm *d*.
def. 24 h | *d*: maior, quàm *b*.
| *a* maior, quàm *b*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 67. Prop. 72.

MVltiplicatarum numeroſarum rationum hyperlogarithmi ſunt quaſi æquemultiplices: item hypologarithmi, quaſi æquemultiplices.

Hypoth.

Sunto rationes numeroſæ *A*, *B*: & eſto *A*, triplicata ipſius *B*.

Dico hyperlogarithmos *A*, hyperlogarithmorum *B*, quaſi triplices eſſe. item hypologarithmos hypologarithmorum.

Demonſtr.

53. b. Ex *B*, *B* rationibus deinceps, duplicatæ rationis hyperlogarithmus, eſt ex hyperlogarithmis vtrarumque *B*, *B* compoſitus. Et ex *B*, *B*, *B* rationibus deinceps, triplicatæ rationis *A*, hyperlogarithmus, eſt ex hyperlogarithmis trium *B*, *B*, *B* compoſitus. item hypologarithmus ex hypologarithmis. Sed rationum *B*, *B*, *B* deinceps, hyperlogarithmi, ſunt quaſi æquales: item hypologarithmi, quaſi æquales. Ergo componendo, rationis ex duabus *B*, *B*, duplicatæ hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum vnius *B*, quaſi eſt duplex: & iterum componendo, rationis *A*, ex tribus *B*, *B*, *B*, triplicatæ hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum vnius *B*, quaſi eſt triplex. item hypologarithmus ad hypologarithmum, quaſi eſt triplex. Quod &c.

69. b.

15. 3.

23. 3.

Quare &c.

Theor. 68. Prop. 73.

MVltiplicatarum numeroſarum rationum, ſunt æquemultiplices logarithmi.

Hypoth.

Sunto rationes *A*, *B*, numeroſæ: & eſto *A*, multiplicata ipſius *B*.

1 Dico logarithmum *A*, logarithmi *B*, totuplicem eſſe, quotuplicata eſt *A* ad *B*.

De-

Demonſtr.

69. *b.* Hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus *A*, ſunt quaſi æquales: item hyperlogarithmi, hypologarithmi, & logarithmus *B*, ſunt quaſi æquales. Sed hyperlogarithmi *A*, ad hyperlogarithmos *B*; & hypologarithmi, ad hypologarithmos, ſunt quaſi totuplices, quotuplicata eſt
31. 3. *A* ad *B*. Ergo hyperlogarithmi *A*, ad logarithmum *B*, ſunt quaſi totuplices. Sunt autem logarithmi *A*, & *B*, quantitates determinatæ. Ergo logarithmus *A*, ad logarithmum *B*, totuplex eſt, quotuplicata eſt *A* ad *B*. Quod &c.

72. *b.* — 65. *b.* — 33. 3.

Quare &c.

Theor. 69. Prop. 74.

RAtiones numeroſę logarithmicam inter ſe rationem habentes, logarithmicè ſunt proportionales, vt earum logarithmi.

Hypoth.

Sunto numeroſæ rationes *A*, *B*, logarithmicam inuicem rationem habentes: & eſto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Dico *A* ad *B*, eſſe logarithmicè, ſicut *a* ad *b*.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, ſumantur multiplicata ratio 3*A*, & æquemultiplex quantitas 3*a*: item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata 4*B*, & æquemultiplex 4*b*.

Demonſtr.

hypoth. | Rationis *A*, logarithmus eſt *a*.
73. h. | Rationis 3*A*, logarithmus eſt 3*a*.
hypoth. | Rationis *B*, logarithmus eſt *b*.
73. h. | Rationis 4*B*, logarithmus eſt 4*b*.
71. h. | Si 3*A*, eſt altior, quàm 4*B*; etiam 3*a*, eſt maior,
70. h. | quàm 4*b*: ſi depreſſior; minor: ſi æquealta; æqualis.
def. 8. 4. | *A* ad *B*, eſt logarithmicè, ſicut *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 6. Prop. 75.

DAta ratione, numeroſam depreſſior inuenire.

Hypoth.

Eſto data ratio *a* ad *b*: cuius maior terminus *a*, minor *b*.

Oportet numeroſam inuenire depreſſiorem, quàm *a* ad *b*.

Conſtr.

Eſto *c*, exceſſus *a*--*b*: & multiplicetur *c*, donec fiat maior, quàm *b*: & ſit multiplicationis numerus *d*: cui addita vnitas faciat *e*.

Dico *e* ad *d*, depreſſiorem eſſe, quàm *a* ad *b*.

Demonſtr.

Quoniam *cd*, maior eſt quàm *b*: ergo *cd*+*c*, maior eſt, quàm *b*+*c*; ideſt, maior, quàm *a*: & *cd*+*c* ad *c*, maior eſt, quàm *a* ad *c*: ergo per conuerſionem rationis *cd*

+*c*

+*c* ad *cd*, minor eſt, quàm *a* ad *b*. Sed *cd*+*c* ad *cd*, eſt vt d+*u* ad *d*: & *e* eſt *d*+*u*: ergo *e* ad *d* minor eſt, quàm *a* ad *b*: & eſt *e* maior, quàm *d*: ergo *e* ad *d*, eſt depreſſior, quàm *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 7. Prop. 76.

DAtis duabus rationibus non æquealtis, logarithmicam rationem habentibus: inuenire numeroſam rationem, depreſſiorem altiore datarum, & altiorem depreſſiore.

Hypoth.

a		*g*	*e*	*h*	*b*
		c	*f*	*d*	
	l		*i*		*k*

Sunto rationes datæ maioris inæqualitatis, *a* ad *b* altior, & *c* ad *d* depreſſior.

Oportet rationem numeroſam inuenire, depreſſiorem, quàm *a* ad *b*, & altiorem, quàm *c* ad *d*.

Conſtr.

Sumatur inter *a*, *b*, media proportionalis *e*: & inter *c*, *d*, media *f*. Et vt *f* ad *c*, ita fiat *e* ad *g*: & vt *f* ad *d*, ita *e* ad *h*: & erit ex æquali *g* ad *h*, vt *c* ad *d*: eritque *g*, maior, quàm *h*: & erunt *g*, *e*, *h*, tres continuè proportionales: eritque *g* maior, quàm *e*; & *e*, maior, quàm *h*.

Et quoniam ſicut *a* ad *b*, duplicata eſt rationum *a* ad *e*, & *e* ad *b*; ſic *g* ad *h*, duplicata eſt rationum *g* ad *e*, & *e* ad *h*:

a *g* *e* *h* *b*

c *f* *d*

l *i* *k*

18. 4. *e* ad *h*: permutando erit ſicut *a* ad *b*, altior, quàm *g* ad *h*; ſic *a* ad *e*, & *e* ad *b*, altior, quàm *g* ad *e*, & *e* ad *h*: ſuntque rationes maioris inæqualitatis: ergo *a* ad *e*, maior eſt, quàm *g* ad *e*: & *a*, maior, quàm *g*. item *e* ad *b*, maior eſt, quàm *e* ad *h*: & *h*, maior, quàm *b*.

Duarum quantitatum *h*---*b*, vel *b*, ſumatur vna non maior, quàm altera: quæ ſit *h*---*b*: cuius æqualiter diuiſæ ſecundum quemlibet numerum particula ſit *i*. & multiplicetur *i*, donec fiat primò maior, quàm *b*: & eſto multiplicationis numerus *k*. Deinde multiplicetur *i*, donec fiat primò maior, quàm *g*: & ſit multiplicationis numerus *l*.

Dico *l* ad *k*, depreſſiorem eſſe, quàm *a* ad *b*: altiorem, quàm *c* ad *d*.

Demonſtr.

Maior eſt *h*---*b*, quàm *i*: ſed *Ki*---*b* non maior: ergo *h*---*b*, maior eſt, quàm *Ki*---*b*: & *h*, maior, quàm *Ki*: & eſt *Ki* maior, quàm *b*. Deinde *a* ad *e*, eſt vt *e* ad *b*: & *e* ad *g*, eſt vt *h* ad *e*: ergo ex æquali in perturbata, *a* ad *g*, eſt vt *h* ad *b*. & permutando *a* ad *h*, vt *g* ad *b*: & *a*---*g* ad *h*---*b* vt *a* ad *g*: ſed *a* maior eſt, quàm *g*: ergo *a*---*g*, maior eſt, quàm *h*---*b*: ſed *h*---*b*, maior eſt, quàm *i*: ergo *a*---*g*, maior eſt, quàm *i*. ſed *li*---*g*, non maior eſt, quàm *i*. ergo *a*---*g*, maior eſt, quàm *li*---*g*: ergo *a* maior

ior eſt, quàm *li*. Ergo *li* ad *ki*, vel *l* ad *k* minor eſt, quàm *a* ad *b*: & ſunt maioris inæqualitatis: ergo *l* ad *K* depreſſior eſt, quàm *a* ad *b*. Quod &c. Rurſum *li* maior eſt, quàm *g*: & *h* maior eſt quàm *Ki*. Ergo *li* ad *Ki*, vel *l* ad *K*, maior eſt, quàm *g* ad *h*, vel quàm *c* ad *d*: & ſunt maioris inæqualitatis rationes: ergo *l* ad *K*, altior eſt, quàm *c* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 8. Prop. 77.

DAta qualibet non numeroſa ratione, dataque altera qualibet ratione inęqualitatis: duas numeroſas rationes inuenire altiorem & depreſſiorem, quàm data non numeroſa; logarithmicè proportionales, vt numerus ad numerum; propiores æqualitati logarithmicæ, quàm ſit data altera ratio.

Hypoth.

Sit data quælibet ratio non numeroſa; cuius maior terminus *a*, minor *b*: & ſit data altera ratio inæqualitatis; cuius maior terminis *c*, minor *d*.

Oportet inuenire duas rationes numeroſas, altiorem, quàm *a* ad *b*, & depreſſiorem, quàm *a* ad *b*; logarithmicè proportionales, vt numerus ad numerum: ſed vt altior ad depreſſiorem logarithmicè ſit minor, quàm vt *c* ad *d*.

Conſtr.

75. *b.* | Inueniatur ratio numeroſa *e* ad *f*, depreſſior, quàm *c* ad *d*. ſumaturque numerus *g*, pariter par,

ma-

53. 3. maior quàm *e*: & quotus eſt *g*, ſubtotuplicata, rationis *a* ad *b*, ratio inueniatur *h* ad *i*: & inueniatur numeroſa ratio *K* ad *l*, depreſſior, quàm *h* ad *i*: & rationis *K* ad *l*, ſumantur duplicata, triplicata, & deinceps reliquæ multiplicatæ, donec fiat ratio *M*, primò altior, quàm *a* ad *b*: & ſit multiplicationis numeris *m*: qui vnitate multatus, relinquatur *n*: & quotus eſt *n*, totuplicata, rationis *K* ad *l*, fiat ratio *N*.

Dico rationem *N* depreſſiorem eſſe, quàm *a* ad *b*: & *M* ad *N* logarithmicè minorem eſſe, quàm vt *c* ad *d*.

Demonſtr.

Si enim ratio *N*, non eſſet depreſſior, quàm *a* ad *b*, eſſet vel æquealta, vel altior. Sed non eſt altior alioquin *M*, non eſſet primò altior, quàm *a* ad *b*. neque eſt æquealta, alioquin eſſet eadem, atque *a* ad *b*: & eſſet etiam *a* ad *b* ratio numeroſa, contra hypotheſim. Ergo ratio *N*, eſt depreſſior, quàm *a* ad *b*.

Deinde quoniam *K* ad *l*, eſt depreſſior, quàm *h* ad *i*: & *h* ad *i*, totuplicata quotus eſt *g*, eſt *a*
19. 4. ad *b*: ergo *K* ad *l*, totuplicata quotus eſt *g*, eſt depreſſior, quàm *a* ad *b*. ſed *K* ad *l*, totuplicata
5. 3. & quotus eſt *m*, eſt altior, quàm *a* ad *b*. Ergo nu-
def. p. 4. merus *m*, maior eſt, quàm *g*: ſed *g*, eſt maior, quàm *e*: ergo *m*, multò eſt maior, quàm *e*: & eſt *m* ad vnitatem, maior, quàm *e* ad eamdem vnitatem: & per conuerſionem rationis, *m* ad *n*, mi-

nor

conſtr. nor eſt, quàm *e* ad *f*. Sed vt *m* ad *n*, ita logari-
17. 4. thmicè eſt ratio *M* ad rationem *N*. ergo ratio *M* ad rationem *N*, minor eſt logarithmicè, quàm vt *e* ad *f*: & multò minor, quàm vt *c* ad *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 70. Prop. 78.

NOn numeroſæ rationis vna tantùm quantitas eſt logarithmus.

Hypoth. p.

Eſto ratio *a* ad *b* non numeroſa: ſintque duæ quantitates inæquales, *c* maior, *d* minor: quarum vna *c*, eſto logarithmus rationis *a* ad *b*.

Dico *d*, non eſſe logarithmum rationis *a* ad *b*.

Præpar.

77. *h.* Inueniantur duæ rationes numeroſæ, *E* altior, quàm *a* ad *b*, & *F* depreſſior: vt ſit *E* ad *F*, logarithmicè ſicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *c* ad *d*. & aſſignentur ipſarum *E*, *F* rationum, logarithmi *e*, *f*.

Demonſtr.

præpar. *E*; *F*: logarithmicè minor, quàm *c*; *d*.
74. *h.* *E*; *F*: *e*; *f*.
17. 4. *e*; *f*: minor, quàm *c*; *d*.
def. 34 *h* *e*: maior, quàm *c*.
63. *h.* *f*: maior, quàm *d*.
def. 34 *h* *d*, non eſt logarithmus rationis *a* ad *b*. Quod &c.

Hypoth. 2.

Eſto *d*, logarithmus rationis *a* ad *b*.

Dico *c*, non eſſe logarithmum rationis *a* ad *b*.

Demonſtr.

ſup.	*e*; *f*: minor, quàm *c*; *d*.
2.3.	*f*; *e*: maior, quàm *d*; *c*.
def 34h	*f*: minor, quàm *d*.
64. *h*.	*e*: minor, quàm *c*.
def.34h	*c*, non eſt logarithmus rationis *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 71. *Prop.* 79.

NOn numeroſarum rationum, altioris maior eſt logarithmus, & depreſſioris minor.

Hypoth.

Sunto non numeroſæ rationes, *A* altior, *B* depreſſior: & eſto ipſius *A*, logarithmus *a*; & ipſius *B*, logarithmus *b*.

Dico *a*, maiorem eſſe, quàm *b*.

Præpar.

76. *h*.	Inter *A*, *B* rationes, inueniatur numeroſa ratio *C*, depreſſior, quàm *A*, altior quàm *B*: cuius logarithmus eſto *c*.

Demonſtr.

ef.34h	*a*: maior eſt, quàm *c*.
def.34h	*c*: maior, quàm *b*.
	a: maior, quàm *b*. Quod &c. Quare &c.

Theo-

Theor. 72. Prop. 80.

MVltiplicatarum rationum, ſunt æquemultiplices logarithmi.

Hypoth.

Eſto ratio *A* rationis *B* triplicata: & eſto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Dico *a* ad *b* triplicem eſſe.

Hypotheſis contradictoria in primo caſu.

c *d*

E *A* *F* *G* *B* *H*

e *a* *f* *g* *b* *h*

Eſto ſi fieri poteſt *a* maior, quàm triplex ad *b*.

Præpar.

76. *b.* Inter rationem *a* ad *b* altiorem, & rationem triplicem depreſſiorem, ratio numeroſa ſumatur *c* ad
77. *b.* *d*, depreſſior, quàm *a* ad *b*, altior, quàm triplex, & vt *a*, ſit maior, quàm *c*; & *d*, maior, quàm *b*. Et inueniantur duæ numeroſæ rationes, *E* altior quàm *A*, & *F* depreſſior: vt ſit *E* ad *F* logarithmicè ſicut numerus ad numerũ, & minor, quàm
77. *b.* vt *a* ad *c*. Item inueniantur duę numeroſæ rationes, *G* altior quàm *B*, & *H* depreſſior; vt ſit *G* ad *H* logarithmicè ſicut numerus ad numerum, & minor quàm vt *d* ad *b*. Sint autem rationum *E*, *F*, *G*, *H*, logarithmi *e*, *f*, *g*, *h*.

c d

E A F G B H

e a f g l h

Demonſtr.

præpar.	*A*: altior, quàm *F*.
14. 4.	*A*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *B*.
præpar.	*G*: altior, quàm *B*.
14. 4.	*F*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *G*.
17. 4.	*A*; *B*: logarithmicè maior, quàm *F*; *G*.
hypoth.	*A*; *B*: triplicata.
17. 4.	*F*; *G*: depreſſior, quàm triplicata.
74. *h*.	*F*; *G*: logarithmicè *f*; *g*.
17. 4.	*f*; *g*: minor, quàm triplex.
præpar.	*E*; *F*: logarithmicè minor, quàm *a*; *c*.
74. *h*.	*E*; *F*: logarithmicè *e*; *f*.
17. 4.	*e*; *f*: minor, quàm *a*; *c*.
def. 34*h*	*e*: maior, quàm *a*.
63. *h*.	*f*: maior, quàm *c*.
præpar.	*G*; *H*: logarithmicè minor, quàm *d*; *b*.
74. *h*.	*g*; *h*: logarithmicè *G*; *H*.
17. 4.	*g*; *h*: minor, quàm *d*; *b*.
2. 3.	*h*; *g*: maior, quàm *b*; *d*.
def. 32*h*	*h*: minor, quàm *b*.
64. *h*.	*g*: minor, quàm *d*.
67. *h*.	*f*; *g*: maior, quàm *c*; *d*.
præpar.	*c*; *d*: maior, quàm triplex.

f; *g*:

3. 5. | *f*; *g*: maior, quàm triplex. } quæ ſunt contradi-
ſup. | *f*; *g*: minor, quàm triplex. } ctoria.

Ergo *a* ad *b*, non eſt maior, quàm triplex.

Hypoth. contrad. in ſecundo caſu.

c						*d*
	E	*A*	*F*	*G*	*B*	*H*
	e	*a*	*f*	*g*	*b*	*h*

Eſto ſi fieri poteſt *a* minor, quàm triplex ad *b*.

Præpar.

6. b. | Inter rationem *a* ad *b* depreſſiorem, & rationem triplicem altiorem ratio numeroſa ſumatur *c* ad *d*, depreſſior, quàm triplex; altior, quàm *a* ad *b*: & vt *c* ſit maior quàm *a*: & *b* maior, quàm *d*.
7. b. | Et inueniantur duæ numeroſæ rationes, *E* altior quàm *A*, & *F* depreſſior; vt ſit *E* ad *F* logarithmicè, ſicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *c* ad *a*.
7. b. | Item inueniantur duæ numeroſæ rationes; *G* altior, quàm *B*; & *H*, depreſſior; vt ſit *G* ad *H*, logarithmicè ſicut numerus ad numerum, & minor, quàm vt *b* ad *d*. Sint autem rationum *E*, *F*, *G*, *H*, logarithmi *e*, *f*, *g*, *h*.

Demonſtr.

præpar. | *E*: altior, quàm *A*.
14. 4. | *E*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *H*.
præpar. | *B*: altior, quàm *H*.
14. 4. | *A*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *B*.
17. 4. | *E*; *H*: logarithmicè maior, quàm *A*; *B*.

A; *B*:

c *d*

E *A* *F* *G* *B* *H*

e *a* *f* *g* *b* *h*

hypoth.	*A*; *B*: triplicata.
17. 4.	*E*; *H*: maior, quàm triplicata.
74. *h.*	*e*; *h*: logarithmicè vt *E*; *H*.
17. 4.	*e*; *h*: maior, quàm triplex.
præpar.	*E*; *F*: minor, quàm *c*; *a*.
74. *h.*	*E*; *F*: logarithmicè vt *e*; *f*.
17. 4.	*e*; *f*: minor, quàm *c*; *a*.
2. 3.	*f*; *e*: maior, quàm *a*; *c*.
*def.*34*h*	*f*: minor, quàm *a*.
64. *h.*	*e*: minor, quàm *c*.
præpar.	*G*; *H*: logarithmicè minor, quàm *b*; *d*.
74. *h.*	*g*; *h*: logarithmicè, vt *G*; *H*.
17. 4.	*g*; *h*: minor, quàm *b*; *d*.
*def.*32*h*	*g*: maior, quàm *b*.
63. *h.*	*h*: maior, quàm *d*.
67. *h.*	*e*; *h*: minor, quàm *c*; *d*.
præpar.	*c*; *d*: minor, quàm triplex.
13. 5.	*e*; *h*: minor, quàm triplex. } quæ ſunt contradi-
Jnp.	*e*; *h*: maior, quàm triplex. } ctoria.

Ergo *a* ad *b*, non eſt minor, quàm triplex.

Ergo *a* ad *b* eſt triplex. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 73. *Prop.* 81.

OMnifariam rationes, logarithmicam inter ſe rationem habentes, logarithmicè ſunt proportionales, vt earum logarithmi. *Hypoth.*

Dico *A* ad *B*, eſſe logarithmicè, ſicut *a* ad *b*.

Sunto rationes *A*, *B*, logarithmicam inuicem rationem habentes: & eſto rationis *A*, logarithmus *a*; & rationis *B*, logarithmus *b*.

Præpar.

Rationis *A*, & quantitatis *a*, ſumantur multiplicata ratio 3*A*, & æquemultiplex quantitas 3*a*: item rationis *B*, & quantitatis *b*, multiplicata 4*B*, & æquemultiplex 4*b*.

Demonſtr.

hypoth.	Rationis *A*, logarithmus eſt *a*.
80. *h.*	Rationis 3*A*, logarithmus eſt 3*a*.
hypoth.	Rationis *B*, logarithmus eſt *b*.
80. *h.*	Rationis 4*B*, logarithmus eſt 4*b*.
def. 34*h* 79. *h.*	Si 3*A*, eſt altior, quàm 4*B*; etiam 3*a*, eſt maior, quàm 4*b*: ſi depreſſior; minor: ſi ęquealta; ęqualis.
def. 8.4.	*A* ad *B*, eſt logarithmicè, ſicut *a* ad *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 74. *Prop.* 82.

DVarum quarumlibet numeroſarum rationum, hyperlogarithmus vnius ad hypologarithmum alterius, maior eſt, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

De-

Demonſtr.

def.24b | Eſt enim hyperlogarithmus vnius, ciuſdem logarithmo maior: & eſt hypologarithmus alterius,
8. 5. | minor eiuſdem logarithmo. Ergo hyperlogarithmus ad logarithmum vnius, maior eſt, quàm vt
p. 3. | hypologarithmus ad logarithmum alterius. Quare permutando, vnius hyperlogarithmus ad hypologarithmum alterius, maior eſt, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Probl. 9. Prop. 83.

DVarum datarum non æquealtarum numeroſarum rationum, datis terminis altioris: inuenire terminos depreſſioris, inter quos ad hyperlogarithmum, maior ſit hyperlogarithmus altioris, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ numeroſæ rationes, *A* altior, *B* depreſſior: ſintque rationis *A*, dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *B* terminos inuenire, inter quos ad hyperlogarithmum, maior eſt hyperlogarithmus inter *c*, *d*; quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Conſtr.

Sumatur inter *c*, *d*, hyperlogarithmus *e*: & inter alios quoslibet eiuſdem rationis *A* terminos
54. b. | minores, quàm *c*, *d*, ſumatur alius minor hyper-
62. b. | logarithmus *f*: & inueniantur termini *g*, *h*, in ratione

ctione *B*, inter quos hyperlogarithmus *i*, ad hypologarithmum *K*, propior ſit æqualitati, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *e* ad *i* maiorem eſſe, quàm vt logarithmus rationis *A*, ad logarithmum rationis *B*.

Præpar.

Eſto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonſtr.

def.24b	*f*: maior eſt, quàm *a*.
8. 5.	*e*; *a*: maior, quàm *e*; *f*.
conſtr.	*e*; *f*: maior, quàm *i*; *k*.
def 24b.	*b*: maior, quàm *k*.
8. 5.	*i*; *k*: maior, quàm *i*; *b*.
13. 5.	*e*; *a*: maior, quàm *i*; *b*.
p. 3.	*e*; *i*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 10. Prop. 84.

DVarum datarum non ęquealtarum numeroſarum rationum, datis terminis depreſſioris: inuenire terminos altioris, inter quos hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum depreſſioris, minor ſit, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ numeroſæ rationes, *A* altior, *B* depreſſior: ſintque rationis *B* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *A* terminos inuenire, inter quos hy-

perlogarithmus, ad hyperlogarithmum inter *c*, *d* minor eſt, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Conſtr.

Sumatur inter *c*, *d*, hyperlogarithmus *e*: & inter alios quoslibet minores terminos, quàm *c*, *d*,
54. b. ſumatur eiuſdem rationis *B* alius minor hyper-
62. b. logarithmus *f*: rationis autem *A*, inueniantur termini, *g*, *h*, inter quos hyperlogarithmus *i*, ad hypologarithmum *k*, minor ſit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *i* ad *e*, minorem eſſe, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Præpar.

Eſto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonſtr.

def. 24b *a*: maior eſt, quàm *K*.
8. 5. *i*; *a*: minor, quàm *i*; *K*.
conſtr. *i*; *K*: minor, quàm *e*; *f*.
def. 24b *b*: minor, quàm *f*.
8. 5. *e*; *f*: minor, quàm *e*; *b*.
13. 5. *i*; *a*: minor, quàm *e*; *b*.
p. 3. *i*; *e*: minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 11. *Prop.* 85.

DVarum datarum non æquealtarum numeroſarum rationum, datis terminis altioris: inuenire termi-

nos

nos depreſſioris, inter quos ad hypologarithmum minor ſit hypologarithmus altioris, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æquealtæ rationes numeroſæ, *A* altior, *B* depreſſior: ſintque rationis *A* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *B* terminos inuenire, inter quos ad hypologarithmum minor ſit hypologarithmus inter *c*, *d*, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Conſtr.

Sumatur inter *c*, *d*, hypologarithmus *e*: & inter alios terminos eiuſdem rationis *A*, minores
56. *b*. quàm *c*, *d*, ſumatur alius maior hypologarithmus
62. *b*. *f*: & inueniantur in ratione *B*, termini *g*, *h*; inter quos hypologarithmus *i* ad hyperlogarithmum *k* maior ſit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *e* ad *i*, minorem eſſe, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Præpar.

Eſto *a*, logarithmus rationis *A*: & *b*, logarithmus rationis *B*.

Demonſtr.

conſtr. | *e*; *f*: minor, quàm *i*; *K*.
p. 3. | *e*; *i*: minor, quàm *f*; *K*.
def. 24 *b* | *K*: maior, quàm *b*.
8. 5. | *f*; *K*: minor, quàm *f*; *b*.
def. 24 *b* | *a*: maior, quàm *f*.

8.5. | *f*; *b*: minor, quàm *a*; *b*.
13. 5. | *e*; *i*: minor, quàm *a*; *b*. Quod &c.
Quare &c.

Probl. 12. *Prop.* 86.

DVarum datarum non æquealtarum numeroſarum rationum, datis terminis depreſſioris: inuenire terminos altioris, inter quos hypologarithmus ad hypologarithmum depreſſioris, maior ſit, quàm vt logarithmus ad logarithmum.

Hypoth.

Sint datæ duæ non æqualtæ numeroſæ rationes, *A* altior, *B* depreſſior: ſintque rationis *B* dati termini *c*, *d*.

Oportet rationis *A* terminos inuenire, inter quos hypologarithmus ad hypologarithmum inter *c*, *d*, maior eſt, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Conſtr.

| Sumatur inter *c*, *d*, hyploogarithmus *e*: & inter alios minores terminos, eiuſdem rationis *B*,
56. *h*. | ſumatur alius maior hypologarithmus *f*: & ratio-
62. *h*. | nis *A*, inueniantur termini *g*, *h*, quos inter hypologarithmus *i* ad hyperlogarithmum *K* maior ſit, quàm vt *e* ad *f*.

Dico *i* ad *e*, maiorem eſſe, quàm vt logarithmus *A* ad logarithmum *B*.

Præpar.

Eſto rationis *A*, logarithmus *a*: & rationis *B* logarithmus *b*.

De-

Demonſtr.

conſtr. | *i*; *K*: maior eſt, quàm *e*; *f*.
p. 3. | *i*; *e*: maior, quàm *K*; *f*.
*def.*24*b* | *b*: maior, quàm *f*.
8. 5. | *K*; *f*: maior, quàm *K*; *b*.
*def.*24*b* | *K*: maior, quàm *a*.
8. 5. | *K*; *b*: maior, quàm *a*; *b*.
13. 5. | *i*; *e*: maior, quàm *a*; *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 75. *Prop.* 87.

ARithmeticè diſpoſitorum terminorum ratio, quàm habent bini minores ad inuicem, altior eſt ratione, quàm habent bini maiores.

Hypoth.

| Sint arithmeticè diſpoſitę quantitates *a*, *b*, *c*, *d*:
4. h. | & ſit *a* minor, quàm *c*. vnde quoniam permutando
def.5.h. | do *a*, *c*, *b*, *d*, ſunt arithmeticè diſpoſitæ, etiam *b* eſt minor, quàm *d*.

Dico rationes terminorum *a*, *b* ad inuicem, altiores eſſe rationibus *c*, *d* ad inuicem.

Præpar.

Quoniam *a*, *b* ſunt inæquales; eſto *a* minor, quàm *b*: & ſit defectus *e*.

Demonſtr.

ſup. | *b*: minor, quàm *d*.
8. 5. | *b*; *e*: minor, quàm *d*; *e*.

b; *a*:

3. 3. | *b*; *a*: maior, quàm *d*; *c*.
hypoth. | *b*: maior, quàm *a*. & *d*: maior, quàm *c*.
def.p. 4. | *b*; *a*: altior, quàm *d*; *c*. Quod &c.
2. 3. | *a*; *b*: minor, quàm *c*; *d*.
hypoth. | *a*: minor, quàm *b*. & *c*: minor, quàm *d*.
*def.p.*4. | *a*; *b*: altior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 76. *Prop.* 88.

HArmonicè diſpoſitum terminorum ratio, quàm habent bini maiores ad inuicem, altior eſt ratione, quàm habent bini minores.

Hypoth.

Sint harmonicè diſpoſitæ quantitates *a*, *b*, *c*, *d*:
34. *h*. & ſit *a* maior, quàm *c*. vnde quoniam permutando
*def.*13*h* *a*, *c*, *b*, *d*, ſunt harmonicè diſpoſitæ, etiam *b*, eſt maior, quàm *d*.

Dico rationes terminorum *a*, *b* ad inuicem, altiores eſſe rationibus *c*, *d* ad inuicem.

Præpar.

Sumatur vna quælibet quantitas *e*: & fiat
a; *e*: *e*; *f*.
b; *e*: *e*; *g*.
c; *e*: *e*; *h*.
d; *e*: *e*; *i*.

De-

Demonſtr.

33. h. | *f, g, g, i* ſunt arithmeticè ordinate.
conſtr. | *c; e: e; h. e; a: f; e.*
p. p. | *c; a: f; h.*
c: minor, quàm *a.* & *f*: minor, quàm *h.*
def.5.h. | *g*: minor, quàm *i.*
87. h. | *f; g*: altior, quàm *h; i.* & *g; f*: altior, quàm *i; h.*
ſup. | *f; g: b; a.* & *g; f: a; b.*
ſup. | *h; i: d; c.* & *i; h: c; d.*
b; a: altior, quàm *d; c.* & *a; b*: altior, quàm *c; d.* Quod &c. Quare &c.

Theor. 77. Prop. 89.

SI fuerint quotcunque magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero; ſitque maior proportio primæ priorum, ad primam poſteriorum, quàm ſecundę, ad ſecundam; & hæc maior, quàm tertiæ, ad tertiam: & ſic deinceps: habebunt omnes priores ſimul, ad omnes poſteriores ſimul, maiorem rationem, quàm omnes priores, relicta prima, ad omnes poſteriores, relicta quoque prima: & multò maiorem, quàm omnes priores, relictis duabus primis, ad omnes poſteriores, relictis duabus primis: & ſic deinceps etiam maiorem, quàm vltima, ad vltimam: ſed minorem, quàm omnes priores, relicta vltima, ad omnes poſteriores, relicta etiam vltima: & multò minorem, quàm omnes priores, relictis duabus vltimis, ad omnes poſteriores, relictis pariter duabus vltimis: & ſic deinceps etiam minorem, quàm prima, ad primam.

Hy-

Hypoth.

a	e
b	f
c	g
d	h

$a; e$: maior, quàm $b; f$.
$b; f$: maior, quàm $c; g$.
$c; g$: maior, quàm $d; h$.

Dico $a+b+c+d; e+f+g+h$: maiorem eſſe, quàm $b+c+d; f+g+h$.

Et $b+c+d; f+g+h$: maiorem, quàm $c+d; g+h$.

Et $c+d; g+h$: maiorem, quàm $d; h$.

Dico etiam $a+b+c+d; e+f+g+h$: minorem eſſe, quàm $a+b+c; e+f+g$.

Et $a+b+c; e+f+g$: minorem, quàm $a+b, e+f$.

Et $a+b; e+f$: minorem, quàm $a; e$.

Demonſtr.

hypoth.	$c; g$: maior, quàm $d; h$.
p. 3.	$c; d$: maior, quàm $g; h$.
p. 3.	$c+d; d$: maior, quàm $g+h; h$.
p. 3.	$c+d: g+h$: maior, quàm $d; h$. Quod &c.
3. 3.	$c+d; c$: minor, quàm $g+h; g$.
2. 3.	$c; c+d$: maior, quàm $g; g+h$.
p. 3.	$c; g$: maior, quàm $c+d; g+h$.
hypoth.	$b; f$: maior, quàm $c; g$.
13. 5.	$b; f$: maior, quàm $c+d; g+h$.
p. 3.	$b; c+d$: maior, quàm $f; g+h$.

$b+c$

p. 3.	$b+c+d$; $c+d$: maior, quàm $f+g+h$; $g+h$.
p. 3.	$b+c+d$; $f+g+h$: maior, quàm $c+d$; $g+h$. Quod &c.
ſup.	$a+b+c+d$; $e+f+g+h$: maior, quàm $b+c+d$; $f+g+h$. Quod &c.
hypoth.	a; e: maior, quàm b; f.
p. 3.	a; b: maior, quàm e; f.
p. 3.	$a+b$; b: maior, quàm $e+f$; f.
3. 3.	$a+b$; a: minor, quàm $e+f$; e.
p. 3.	$a+b$; $e+f$: minor, quàm a; e. Quod &c.
ſup.	$a+b$; b: maior, quàm $e+f$; f.
p. 3.	$a+b$; $e+f$: maior, quàm b; f.
hypoth.	b; f: maior, quàm c; g.
13. 5.	$a+b$; $e+f$: maior, quàm c; g.
p. 3.	$a+b$; c: maior, quàm $e+f$; g.
p. 3.	$a+b+c$; c: maior, quàm $e+f+g$; g.
3. 3.	$a+b+c$; $a+b$: minor, quàm $e+f+g$; $e+f$.
p. 3.	$a+b+c$; $e+f+g$: minor, quàm $a+b$; $e+f$. Quod &c.
ſup.	$a+b+c+d$; $e+f+g+h$: minor, quàm $a+b+c$; $e+f+g$. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 78. Prop. 90.

E Serie harmonica naturali ab vnitate, terminorum harmonicè diſpoſitorum, altioris rationis maior terminus, ad maiorem depreſſioris, maior eſt, quàm vt hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum: & hyperlogarithmus,

thmus, ad hyperlogarithmum, maior, quàm vt hypologarithmus, ad hypologarithmum: & hypologarithmus, ad hypologarithmum maior, quàm vt minor terminus, ad minorem.

Hypoth.

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, termini harmonicè diſpoſiti *a*, *b*, *c*, *d*, quorum altior ſit ratio *a* ad *b*, quàm *c* ad *d*. Sitque *a*, maior, quàm *b*: ideoque & *c*, maior, quàm *d*.
def.13b

Quoniam *a* ad *b*, altior eſt, quàm *c* ad *d*: oportet *a*, maiorem eſſe, quàm *c*; & *b*, quàm *d*. alio-
34. *h.* quin permutando, diſpoſitorum harmonicè *a*, *c*,
def.13.h *b*, *d*, eſſet *c* maior, quàm *a*; ideoque & *d* maior,
88. *b.* quàm *b*; & *c* ad *d*, altior ratio, quàm *a* ad *b*, *contra hypoth.*

Deinde quoniam *a*, *b*, *c*, *d*, ſunt in ſerie harmonica naturali ab vnitate, harmonicè diſpoſiti;
27. *h.* ſunt denominati à numeris arithmeticè diſpoſitis:
26. *h.* quorum denominator *a*, reciprocè minor eſt de-
24. *h.* nominatore *b*, necnon reciprocè minor denomi-
def.5.h. natore *c*. & quot ſunt numeri omnes medij inter denominatores *a*, *b*; totidem ſunt inter denomi-
27. *h.* natores *c*, *d*: totidemque in ſerie harmonica ſunt inter *a*, *b*; totidemque etiam inter *c*, *d*.

Sint ergo inter *a*, *b* termini *e*, *f*: & inter *c*, *d*,
def.22b totidem termini *g*, *h*: eritque $a+e+f$, hyperlo-
def.23b garithmus rationis *a*, ad *b*; & $e+f+b$, hypolo-

gari-

garithmus eiuſdem rationis, inter eoſdem terminos *a*, *b*. erit quoque $c+g+h$, hyperlogarithmus rationis *c* ad *d*; & $g+h+d$, eiuſdem hypologarithmus inter eoſdem terminos *c*, *d*.

Dico *a* ad *c*, maiorem eſſe, quàm $a+e+f$ ad $c+g+h$:

Et $a+e+f$ ad $c+g+h$, maiorem, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$.

Et $e+f+b$ ad $g+h+d$, maiorem, quàm *b* ad *d*.

Demonſtr.

hypoth. Quoniam *a*, *e*, *f*, *b*, necnon *c*, *g*, *h*, *d*, ſunt harmonicè ordinati, in ſerie harmonica naturali ab vnitate: ergo eorum denominatores, ſunt ari- *27. b.* thmeticè ordinati, in ſerie arithmetica naturali ab vnitate: totidemque ſunt *a*, *e*, *f*, *b*; quot *c*, *g*, *h*, *ſup.* *d*: ergo denominatores *a*, *e*, *f*, *b*; ſunt ſimiliter *def.8.b.* arithmeticè diſpoſiti, atque denominatores *c*, *g*, *h*, *d*: ergo etiam *a*, *e*, *f*, *b* ſunt ſimiliter harmoni- *16. b.* cè diſpoſiti, atque *c*, *g*, *h*, *d*: ergo *a*, *e*, *c*, *g* ſunt *def.16b* harmonicè diſpoſiti: ergo permutando *a*, *c*, *e*, *g*, *34. b.* ſunt harmonicè diſpoſiti. Similiter oſtendetur, quòd *e*, *g*, *f*, *h* ſunt harmonicè diſpoſiti: necnon *f*, *h*, *b*, *d*.

def.19b Rurſum quoniam *a*, *e*, *f*, *b* ſunt harmonicè ordinati, & eſt *a* maior, quàm *b*: ergo *a* maior, eſt quàm *e*; & *e*, maior, quàm *f*: & *f*, quàm *b*: item *ſup.* *c*, maior eſt quàm *g*; *g*, quàm *h*; *h*, quàm *d*. Et *hypoth.* quoniam *a*, *c*, *e*, *g* ſunt harmonicè diſpoſiti, & eſt

def.13b | a, maior, quàm c; ergo & e, maior eſt, quàm g;
82. h. | item f, quàm h; & b, quàm d. & eſt a ad e ratio
def.p.4. | altior, ideoque maior, quàm e ad g; & e ad g, altior, & maior, quàm f ad h; & f ad h, altior, & maior, quàm b ad d.

83. h. | Ergo a ad c maior eſt, quàm vt $a+e+f$ ad $c+g+h$. Quod &c. Et eſt $a+e+f$ ad $c+g+h$ maior, quàm $e+f$ ad $g+h$: & $e+f$ ad $g+h$ maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$: ergo $a+e+f$ ad $c+g+h$, eſt maior, quàm $e+f+b$ ad $g+h+d$. Quod &c. Et eſt $e+f+b$ ad $g+h+d$, maior, quàm b ad d. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 79. Prop. 91.

SI quatuor quantitatum prima ad ſecundam maior fuerit, quàm tertia ad quartam: productus extremarum, maior eſt producto mediarum.

Hypoth.

a; b: maior, quàm c; d.

Dico ad: maiorem eſſe, quàm bc.

Præpar.

Fiat productus bd.

Demonſtr.

9. h. | ad; bd: a; b.
9. h. | bc; bd: c; d.
hypoth. | a; b: maior, quàm c; d.

ad;

13. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
10. 5. | *ad*: maior, quàm *bc*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 80. Prop. 92.

SI quatuor quantitatum productus extremarum maior fuerit producto mediarum: erit prima ad ſecundam maior, quàm vt tertia ad quartam.

Hypoth.

Sunt quatuor quantitates *a*, *b*, *c*, *d*: & eſt *ad* maior, quàm *bc*.

Dico *a*; *b*; maiorem eſſe, quàm *c*; *d*.

Præpar.

Aſſumatur productus *bd*.

Demonſtr.

hypoth. | *ad*: maior, quàm *bc*.
8. 5. | *ad*; *bd*: maior, quàm *bc*; *bd*.
9. *h*. | *ad*; *bd*: *a*; *b*.
9. *h*. | *bc*; *bd*: *c*; *d*.
13. 5. | *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 81. Prop. 93.

SI fuerit prima ad ſecundam, maior, quàm vt tertia ad quartam: fuerit autem & tertia ad quartam maior, quàm vt quinta ad ſextam: item quinta ad ſextam maior fuerit, quàm vt ſeptima ad octauam: erit compoſita prima

cum

cum tertia, ad compoſitam ſecundam cum quarta, maior quàm vt compoſita quinta cum ſeptima, ad compoſitam ſextam cum octaua.

Hypoth.

a *b*
c *d*
e *f*
g *h*

a; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
c; *d*: maior, quàm *e*; *f*.
e; *f*: maior, quàm *g*; *h*.

Dico *a*+*c*; *b*+*d*: maiorem, quàm *e*+*g*; *f*+*h*.

Præpar.

Fiant producti *af*, *ah*, *cf*, *ch*, *be*, *bg*, *de*, *dg*.

Demonſtr.

29. *h.*
af+*ah*: productus *a* per *f*+*h*.
cf+*ch*: productus *c* per *f*+*h*.
af+*ah*+*cf*+*ch*: productus *a*+*c* per *f*+*h*.
be+*bg*: productus *b*, per *e*+*g*.
de+*dg*: productus *d*, per *e*+*g*.
be+*bg*+*de*+*dg*, productus *b*+*d*, per *e*+*g*.

hypoth. *a*; *b*: maior, quàm *c*; *d*.
hypoth. *c*; *d*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. *a*; *b*: maior, quàm *e*; *f*.
hypoth. *e*; *f*: maior, quàm *g*; *h*.
13. 5. *a*; *b*: maior, quàm *g*; *h*.
13. 5. *c*; *d*: maior, quàm *g*; *h*.

af:

93. b. { *af*: maior, quàm *be*.
ah: maior, quàm *bg*.
cf: maior, quàm *de*.
ch: maior, quàm *dg*. }
af+ah+cf+ch: maior, quàm *be+bg+de+dg*.
94. b. *a+c*; *b+d*: maior, quàm *e+g*; *f+h*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 82. Prop. 94.

SI fuerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eorum ſubmultipli: inter ſimplos terminos altioris rationis hyperlogarithmus, ad hyperlogarithmum depreſſioris, maiorem habebit rationem, quàm inter ſubmultiplos. hypologarithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimplos depreſſioris, minorem habebit, quàm inter ſubmultiplos.

Hypoth.

1(3)		1(4)		1(5)		1(6)
1(6)	1(7)	1(8)	1(9)	1(10)	1(11)	1(12)

1(7)		1(8)		1(9)		1(10)
1(14)	1(15)	1(16)	1(17)	1(18)	1(19)	1(20)

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10): quorum 1(3), maior, quàm 1(6): ideo-

1(3) 1(4) 1(5) 1(6)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)

def.13b ideoq; & 1(7), maior, quàm 1(10). & eſto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10: ideo-
def p.4. que etiam maior. ſint autem & iſtorum æque-
36. b. ſubmultipli, 1(6), 1(12), 1(14), 1(20), pa-
15. 5. riter harmonicè diſpoſiti, & æquè cum prædictis proportionales. Sumantur etiam inter 1(3), 1(6) medij omnes harmonici 1(4), 1(5): & inter 1(7), 1(10), medij omnes 1(8) 1(9); quorum æqueſubmultipli 1(8), 1(10), 1(16), 1(18).
def.16b Conſtat quod ſicut 1(3), 1(4), 1(5), 1(6), &
def.19b ſimiliter 1(7), 1(8), 1(9), 1(10) harmonicè ſunt ordinati, ſic 1(6), 1(8), 1(10), 1(12), &
15.5. ſimiliter 1(14), 1(16), 1(18), 1(20) ſunt harmonicè ordinati, & æquè cum prædictis proportionales. Deinde inter 1(6), 1(12), & inter 1(14), 1(20) ſumantur omnes reliqui medij harmonici 1(7), 1(9), 1(11), & 1(15), 1(17), 1(19).

Dico primò 1(3)+1(4)+1(5) ad 1(7)+1(8)+1(9) maiorem eſſe, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11) ad 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19).

De-

Demonſtr.

up. 1(3); 1(7): 1(6); 1(14).

. *h.* 1(6); 1(14): maior, quàm 1(7); 1(15).

. *h.* 1(6); 1(14): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14) +1(15).

3. 5. 1(3); 1(7): maior, quàm 1(6)+1(7); 1(14) +1(15).

Similiter demonſtrabitur.

ſup. 1(4); 1(8): maior, quàm 1(8)+1(9); 1(16) +1(17). Et

ſup. 1(5); 1(9): maior, quàm 1(10)+1(11); 1(18) +1(19).

39. *h.* 1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(8); 1(16).

ſup. 1(8); 1(16): 1(4); 1(8).

13. 5. 1(6)+1(7); 1(14)+1(15): maior, quàm 1(4); 1(8).

Similiter demonſtrabitur.

ſup. 1(8)+1(9); 1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9). Et

ſup. 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17): maior, quàm 1(5); 1(9).

93. *h.* 1(3)+1(4); 1(7)+1(8): maior, quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9); 1(14)+1(15)+1(16) +1(17).

Similiter demonſtrabitur.

93. *h.* 1(3)+1(4)+1(5); 1(7)+1(8)+1(9): maior,

$$\frac{1(3) \quad 1(4) \quad 1(5) \quad 1(6)}{1(6)\ 1(7)\ 1(8)\ 1(9)\ 1(10)\ 1(11)\ 1(12)} ; \frac{1(7) \quad 1(8) \quad 1(9) \quad 1(10)}{1(14)\ 1(15)\ 1(16)\ 1(17)\ 1(18)\ 1(19)\ 1(20)}$$

quàm 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11); 1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19). Quod &c.

Dico ſecundò 1(4)+1(5)+1(6); 1(8)+1(9)+1(10): maiorem eſſe, quàm 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20).

Demonſtr.

89. *h.* { 1(7)+1(8); 1(15)+1(16): maior, quàm 1(4); 1(8).
1(4); 1(8): maior, quàm 1(9)+1(10); 1(17)+1(18).
1(9)+1(10); 1(17)+1(18): maior, quàm 1(5); 1(9). }

93. *h.* 1(7)+1(8)+1(9)+1(10); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18): maior, quã 1(4)+1(5); 1(8)+1(9).

89. *h.* 1(4)+1(5); 1(8)+1(9): maior, quàm 1(11)+1(12); 1(19)+1(20).

89. *h.* 1(11)+1(12); 1(19)+1(20): maior, quàm 1(6); 1(10).

93. *h.* 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20): maior, quã 1(4)+1(5)+1(6); 1(8)+1(9)+1(10).

Quod

Quod è conuerſo eſt demonſtrandum.

Quare &c.

Theor. 83. *Prop.* 95.

SI fuerint eiuſdem rationis duo hyperlogarithmi, alter ex paucioribus, alter ex terminis vno pluribus; & ſubmultiplicati fuerint vtrorumque termini, per alterius multitudinem terminorum: ſubmultipli eius, qui ex paucioribus, & ſubmultipli eius, qui ex pluribus, primi ſunt ęquales; & reliqui deinceps ſunt minores, hoc ordine; ſecundus eius, qui ex pluribus; & ſecundus eius, qui ex paucioribus; & tertius eius, qui ex pluribus; & tertius eius, qui ex paucioribus; & ſic deinceps. Quod ſi fuerint hypologarithmi: ſubmultipli eius, qui ex paucioribus, & ſubmultipli eius, qui ex pluribus, vltimi ſunt æquales; & reliqui deinceps ſunt maiores, hoc ordine; penultimus eius, qui ex pluribus; & penultimus eius, qui ex paucioribus; & tritultimus eius, qui ex pluribus; & tritultimus eius, qui ex paucioribus; & ſic deinceps.

Hypoth.

1(*a*)		1(*b*)	1(*c*)
1(*d*)	1(*e*)	1(*f*)	1(*g*)
1(3*a*)		1(3*b*)	1(3*c*)
1(2*d*)	1(2*e*)	1(2*f*)	1(2*g*)

Sint earumdem rationum 1(*a*), ad 1(*c*), & 1(*d*) ad 1(*g*) duo hyperlogarithmi; vnus ex duobus terminis 1(*a*), 1(*b*); alter

1(a) 1(b) 1(c)
1(d) 1(e) 1(f) 1(g)
1(3a) 1(3b) 1(3c)
1(2d) 1(2e) 1(2f) 1(2g)

alter ex tribus 1(d), 1(e), 1(f): item duo hypologarithmi, ex duobus 1(b), 1(c), & ex tribus 1(e), 1(f), 1(g). & ſubtripli accipiantur 1(3a), 1(3b), 1(3c), necnon ſubdupli 1(2d), 1(2e), 1(2f), 1(2g).

Dico 1(3a), 1(2d) eſſe æquales: necnon 1(3c), 1(2g) eſſe æquales: & hoc ordine, priores maiores eſſe, & poſteriores minores 1(3a), 1(2e), 1(3b), 1(2f), 1(3c).

Demonſtr.

24. b.	1(a); 1(c): 1(d); 1(g): c; a: g; d
p. p.	c; g: a; d: c---a; g---d.
27. b.	c---a: 2. g---d: 3.
11. 5.	c; g: a; d: 2; 3.
31. b.	3c: 2g. 3a: 2d.
10. b.	1(3c): 1(2g). 1(3a): 1(2d). Quæ &c.
6. b.	2g---2f: 2f---2e: 2e---2d: 2.
6. b.	3c---3b: 3b---3a: 3.
	3a, 2e, 3b, 2f, 3c ſunt, hoc ordine, minores, & deinceps maiores.
10. b.	1(3a), 1(2e), 1(3b), 1(2f), (13c) ſunt, hoc ordine, maiores, & deinceps minores. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 84. Prop. 96.

SI fuerint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti; & alij quatuor eorum ſubdupli; alijque ſubtripli; & ſubquadrupili, & ſic deinceps in infinitum: inter ſimplos terminos altioris, rationis hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum depreſſioris maiorem habet rationem, quàm inter ſubduplos: & inter ſubduplos, maiorem, quàm inter ſubtriplos; & ſic deinceps. hypologarithmus verò inter ſimplos altioris, ad inter ſimplos depreſſioris, minorem habet rationem, quàm inter ſubduplos; & inter ſubduplos, minorem, quàm inter ſubtriplos; & ſic deinceps.

Hypoth.

1(3) 1(4) 1(5) 1(16)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)
1(9) 1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18)

1(7) 1(8) 1(9) 1(10)
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)
1(21) 1(22) 1(23) 1(24) 1(25) 1(26) 1(27) 1(28) 1(29) 1(30)

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini harmonicè diſpoſiti 1(3), 1(6), 1(7), 1(10); quorum 1(3) maior, quàm 1(6); ideoque, & 1(7) maior, quàm 1(10). Et eſto altior ratio 1(3) ad 1(6), quàm 1(7) ad 1(10). Sint autem iſtorum ſubdupli 1(6), 1(12), 1(14), 1(20): & ſubtripli 1(9), 1(18), 1(21), 1(30). inter quos accipiantur medij harmonici, & ex his Hyperloga-

1(3) 1(4) 1(5) 1(16)
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(12)
1(9) 1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18)

1(8) 1(9) 1(10)
1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(20)
1(21) 1(22) 1(23) 1(24) 1(25) 1(26) 1(27) 1(28) 1(29) 1(30)

logarithmi, & Hypologarithmi.

94. *h.* Conſtat primò, quòd inter ſimplos, maior eſt hyperlogarithmus altioris, ad hyperlogarithmum depreſſioris, quàm inter ſubduplos: & hypologarithmus minor.

Dico 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11); 1(14) +1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19): maiorem eſſe, quàm 1(9)+1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17); 1(21)+1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29).

Præpar.

Sumantur ipſorum 1(6), 1(7), 1(4), 1(5) ſubtripli: & 1(9), 1(10), 1(11), 1(21), 1(22), 1(23) ſubdupli.

Demonſtr.

95. *h.* 1(18), 1(20), 1(21), 1(22) ſunt maiores, & deinceps minores.

95. *h.* 1(42), 1(44), 1(45), 1(46) ſunt maiores, & deinceps minores.

40. *h.* 1(18), 1(20), 1(21), 1(22), & 1(42), 1(44), 1(45), 1(46) ſunt ſimiliter harmonicè diſpoſiti.

1(18),

88. b. 1(18); 1(42): maior, quàm 1(20); 1(44).
1(20); 1(44): maior, quàm 1(21); 1(45).
1(21); 1(45): maior, quàm 1(22); 1(46).

36. b. 1(18), 1(22), 1(42), 1(45) ſimiliter proportionales, atque 1(6), 1(7), 1(14), 1(15).
1(18), 1(20), 1(22), 1(42), 1(44), 1(46) ſimiliter proportionales, atque 1(9), 1(10), 1(11), 1(21), 1(22), 1(23).

89. b. 1(6); 1(14): maior, quã 1(9)+1(10); 1(21)+1(22).
89. b. 1(9)+1(10); 1(21)+1(22): maior quàm 1(7); 1(15).
13. 5. 1(7); 1(15): maior, quàm 1(11); 1(23).

ſup. 1(11); 1(23): maior, quàm 1(8); 1(16).
1(8); 1(16): maior, quàm 1(12)+1(13); 1(24)+1(25).
1(12)+1(13); 1(24)+1(25): maior, quàm 1(9); 1(17).
Et ſic deinceps quoad fuerint termini.

93. b. 1(6)+1(7)+1(8)+1(9)+1(10+1(11); 1(14)+1(15+1(16)+1(17)+1(18)+1(19): maior, quã 1(9)+1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17); 1(21)+1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29).
Quod &c.

Dico etiam 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20): minorem eſſe, quàm 1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+(15)+1(16)

1(3) 1(4) 1(5) 1(
1(6) 1(7) 1(8) 1(9) 1(10) 1(11) 1(1
1(9) 1(10) 1(11) 1(12) 1(13) 1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(1

1(7) 1(8) 1(9) 1(1
1(14) 1(15) 1(16) 1(17) 1(18) 1(19) 1(2
1(21) 1(22) 1(23) 1(24) 1(25) 1(26) 1(27) 1(28) 1(29) 1(3

+1(16)+1(17)+(1(18); 1(22)+1(23)+1(24)+1(25)
+1(26)+1(27)+1(28)+1(29)+1(30).

Demonſtr.

ſup.
1(10); 1(22): maior, quàm 1(7); 1(15).
1(7); 1(15): maior, quàm 1(11)+1(12); 1(13)
+1(14).
1(11)+1(12); 1(23)+1(24): maior, quàm 1(8);
1(16).
1(8); 1(16): maior, quàm 1(13); 1(25).
Et ſic deinceps, quoad fuerint termini.

93. b. 1(10)+1(11)+1(12)+1(13)+1(14)+1(15)+1(16)+1(17)+1(18); 1(22)+1(23)+1(24)+1(25)+1(26)+1(27)+1(28)+1(29)+1(30): maior, quàm 1(7)+1(8)+1(9)+1(10)+1(11)+1(12); 1(15)+1(16)+1(17)+1(18)+1(19)+1(20). Quod è conuerſo &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 85. *Prop.* 97.

Eiuſdem rationis numeroſæ inter maiores terminos, maior eſt hyperlogarithmus ad hypologarithmum, quàm inter minores.

Demonſtr.

Nàm ſunt maiores, & deinceps minores, hoc
54. *h.* ordine, hyperlogarithmus inter maiores termi-
57. *h.* nos, hyperlogarithmus inter minores, hypologa-
56. *h.* rithmus inter minores, & hypologarithmus inter
8. 5. maiores. Quare inter maiores, hyperlogarithmus ad hypologarithmum, maior eſt, quàm inter minores.

Theor. 86. *Prop.* 98.

E Serie harmonica naturali ab vnitate, terminorum harmonicè diſpoſitorum, altioris rationis logarithmus ad logarithmum depreſſioris, minor eſt, quàm vt hyperlogarithmus ad hyperlogarithmum; & maior, quàm vt hypologarithmus ad hypologarithmum.

Hypoth. commun.

A *B* *C* *D*
N *O*
G *H* *I* *K*
R *S* *P* *Q*
E *F*

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini *A*, *B*, *C*, *D*, harmonicè diſpoſiti: quorum ratio *A*

A *B* *C* *D*

N *O*

G *H* *I* *K*

R *S* *P* *Q*

E *F*

ad *B*, altior, quàm *C* ad *D*. Et ſit rationis *A* ad *B*, loga-rithmus *E*: & rationis *C* ad *D*, logarithmus *F*. Sint au-tem inter *A*, *B*, *C*, *D*, vel inter æqueproportionales nu-meroſos terminos hyperlogarithmi, & hypologarithmi: rationis quidem *A* ad *B*, hyperlogarithmus *G*, & hy-pologarithmus *H*: & rationis *C* ad *D*, hyperlogarithmus *I*, & hypologarithmus *K*.

Dico *E* ad *F* minorem eſſe, quàm *G* ad *I*; maiorem, quàm *H* ad *K*.

Præpar.

Eſto, ſi poteſt, *E* ad *F*, maior, quàm *G* ad *H*: & ſumatur *L* ad *M* ratio, quæ cum ratione *G* ad *H*, componit rationem, *E* ad *F*. Et quo-niam minor, quàm *E*, eſt ad *F*, vt *G* ad *H*: *L* ad *M*, eſt vt *E* ad minorem, quàm *E*: quare *L*,
62. *b.* maior eſt, quàm *M*. Inueniatur rationis *C* ad *D* hyperlogarithmus *N*, qui ſit minor ad hypolo-garithmum *O*, quàm vt *L* ad *M*. Quod ſi ter-mini, inter quos cenſentur *N*, *O*, non ſunt mi-nores, quàm inter quos *H*, *K*; ſumantur alij mi-nores æqueproportionales ad *C*, *D*, necnon alij

æque-

æqueproportionales ad *A*, *B*: inter quos rationis quidem *C* ad *D* ſint hyperlogarithmus *P*, & hypologarithmus *Q*; & rationis *A* ad *B* hyperlogarithmus *R*, & hypologarithmus *S*.

Demonſtr.

96. h. | *R*; *P*: minor eſt, quàm *G*; *H*.
97. h. | *P*; *Q*: minor, quàm *N*; *O*: & minor, quàm *L*; *M*.
4. 3. | *R*; *Q*: minor, quàm *G*; *H*, + *L*; *M*.
ſuppoſ. | *E*; *F*: *G*; *H*, + *L*; *M*.
13. 5. | *R*; *Q*: minor, quàm *E*; *F*. *contra* 82. *h*.

Ergo *E* ad *F*, non eſt maior, quàm *G* ad *H*.

Præpar.

Eſto *E* ad *F*, eadem, quæ *G* ad *H*, ſi poteſt: & inter minores terminos, quàm quos inter ſunt hyperlogarithmi *G*, *H*, ſumantur alij *R*, *P*.

Demonſtr.

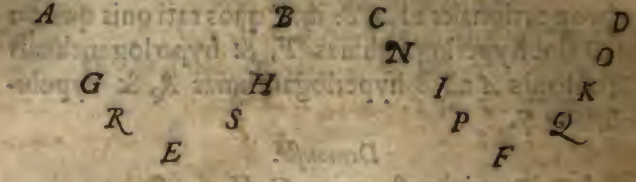
96. h. | *G*; *H*: maior, quàm *R*; *P*.
ſuppoſ. | *E*; *F*: *G*; *H*.
13. 5. | *E*; *F*: maior, quàm *R*; *P*. *contra demonſtrata ſuperiùs*.

Ergo *E* ad *F*, non eſt, vt *G* ad *H*.

Ergo *E* ad *F*, eſt minor, quàm vt *G* ad *H*. Quod &c.

Præpar.

Eſto deinde *E* ad *F*, minor, quàm *I* ad *K*: & ſumatur *L* ad *M* ratio, quæ cum *E* ad *F*, rationem *I* ad *K* componit. Et quoniam maior, quàm *E*, ad *F*, eſt vt *I* ad *K*: *L* ad *M*, eſt vt maior, quàm *E*, ad *E*: & *L*, ma-



ior eſt, quàm *M*. Deinde fiant eadem, quæ ſupra.

Demonſtr.

82. *h.* | *S*; *P*: minor eſt, quàm *E*; *F*.
præpar. | *P*; *Q*: minor, quàm *L*; *M*.
4. 3. | *S*; *Q*: minor, quàm *E*; *F*, + *L*; *M*.
ſuppoſ. | *I*; *K*: *E*; *F*, + *L*; *M*.
13. 5. | *S*; *Q*: minor, quàm *I*; *K*. *contra* 96. *h*.

Præpar.

Ergo *E* ad *F* non eſt minor, quàm *I* ad *K*.

Præpar.

Eſto *E* ad *F*, eadem, quæ *I* ad *K*: & inter minores terminos, quàm quos inter ſunt hypologarithmi *I*, *K*, ſumantur alij *S*, *Q*.

Demonſtr.

ſuppoſ. | *E*; *F*: *I*; *K*.
96. *h*. | *I*; *K*: minor eſt, quàm *S*; *Q*.
13. 5. | *E*; *F*: minor, quàm *S*; *Q*. *contra ſuperiùs demonſtrata*.

Ergo *E* ad *F*, non eſt eadem, quæ *I* ad *K*.
Ergo *E* ad *F*, eſt maior, quàm *I* ad *K*. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 87. Prop 99.

QVatuor terminorum è ſerie harmonica naturali ab vnitate diſpoſitorum harmonicè, altioris rationis maior terminus ad maiorem depreſſioris, maior eſt, quàm vt logarithmus ad logarithmum: & logarithmus ad logarithmum, maior, quàm vt minor ad minorem.

Hypoth.

Sint è ſerie harmonica naturali ab vnitate, quatuor termini *a, b, c, d,* harmonicè diſpoſiti: quorum ratio *a* ad *b*, altior, quàm *c* ad *d*: & *a*, maior, quàm *b*: ideoque etiam *c*, maior, quàm *d*. Et eſto rationis *a* ad *b*, logarithmus *e*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Dico *a*; *c*: maiorem, quàm *e*; *f*.

Et *e*; *f*: maiorem, quàm *b*; *d*.

Præpar.

Rationis *a* ad *b*, ſumantur hyperlogarithmus *g*, & hypologarithmus *h*: & rationis *c* ad *d*, hyperlogarithmus *l*, & hypologarithmus *m*.

Demonſtr.

90. *h.*	*a*; *c*: maior, quàm *g*; *l*.
98. *h.*	*g*; *l*: maior, quàm *e*; *f*.
98. *h.*	*e*; *f*: maior, quàm *h*; *m*.
90. *h.*	*h*; *m*: maior, quàm *b*; *d*.
13. 5.	*a*; *c*: maior, quàm *e*; *f*. Quod &c.
13. 5.	*e*; *f*: maior, quàm *b*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

Theo-

Theor. 88. Prop. 190.

QVatuor numerorum arithmeticè diſpoſitorum, ratio primi ad ſecundum, totuplicata, quotus eſt primus, maior eſt, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus eſt quartus: atque totuplicata ratio primi ad ſecundum, quotus eſt ſecundus, minor eſt, quàm totuplicata tertij ad quartum, quotus eſt tertius.

Hypoth.

Sint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti *a*, *b*, *c*, *d*.

Dico rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *a*, maiorem eſſe, ratione *c* ad *d*, totuplicata, quotus eſt *d*: & rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *b*, minorem eſſe, ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*.

Præparatio.

Sumantur in ſerie harmonica naturali ab vnitate termini æqueordinati cum numeris *a*, *b*, *c*, *d*, in ſerie arithmetica naturali: nempe vnitates denominatæ ab ipſis: 1(*a*), 1(*b*), 1(*c*), 1(*d*). Et eſto rationis *c* ad *b*, logarithmus *e*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Demonſtr. p.

Terminus *a*, vel minor eſt, vel maior, quàm *b*: & rurſum *a*, vel minor eſt, vel maior, quàm *c*. Eſto *a*, minor, quàm *b*: & minor, quàm *c*.

hypoth.	*a*, *b*, *c*, *d*: arithmeticè diſpoſiti.
14. *b.*	1(*a*), 1(*b*), 1(*c*), 1(*d*): harmonicè diſpoſiti,
ſup.	1(*a*): maior, quàm 1(*b*): & maior, quàm 1(*c*).
88. *b.*	1(*a*); 1(*b*): altior, & maior, quàm 1(*c*); 1(*d*).

1(*a*);

65. h. 1(a); 1(b): logarithmus e.
65. h. 1(c); 1(d): logarithmus f.
12. h. 1(a): maior, quàm 1(b).
def. 13 b 1(c): maior, quàm 1(d).
8. 5. 1(a); 1(d): maior, quàm 1(a); 1(c).
99. h. 1(a); 1(c): maior, quàm e; f.
99. h. e; f: maior, quàm 1(b); 1(d).
8. 5. 1(b); 1(d): maior, quàm 1(b); 1(c).
13. 5. 1(a); 1(d): maior, quàm e; f.
13. 5. e; f: maior, quàm 1(b); 1(c).
12. h. 1(a); 1(d): d; a.
12. h. 1(b); 1(c): c; b.
13. 5. d; a: maior, quàm e; f.
13. 5. e; f: maior, quàm c; b.
91. h. df: maior, quàm ae.
91. h. eb: maior, quàm fc.

hypoth. Et quoniam f, logarithmus eſt rationis c ad d:
73. h. ergo df, logarithmus eſt rationis c ad d, totu-
hypoth. plicatæ, quotus eſt d. item quoniam e, logari-
73. h. thmus eſt rationis a ad b: ergo ae, logarithmus
eſt rationis a ad b totuplicatæ, quotus eſt e. Et
74. h. vt ae ad df, ita eſt ratio a ad b totuplicata, quo-
tus eſt a, ad rationem c ad d totuplicatam quo-
71. h. tus eſt d. eſt autem ae, minor, quàm df: ergo ra-
tio a ad b totuplicata, quotus eſt a, depreſſior
hypoth. eſt a ratione c ad d totuplicata, quotus eſt d. eſt
def. 5. h. autem a minor, quàm b; & c, minor, quàm d:

Ergo

Theor. 88. Prop. 190.

QVatuor numerorum arithmeticè diſpoſitorum, ratio primi ad ſecundum, totuplicata, quotus eſt primus, maior eſt, quàm tertij ad quartum totuplicata, quotus eſt quartus: atque totuplicata ratio primi ad ſecundum, quotus eſt ſecundus, minor eſt, quàm totuplicata tertij ad quartum, quotus eſt tertius.

Hypoth.

Sint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti *a*, *b*, *c*, *d*.

Dico rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *a*, maiorem eſſe, ratione *c* ad *d*, totuplicata, quotus eſt *d*: & rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *b*, minorem eſſe, ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*.

Præparatio.

Sumantur in ſerie harmonica naturali ab vnitate termini æqueordinati cum numeris *a*, *b*, *c*, *d*, in ſerie arithmetica naturali: nempe vnitates denominatæ ab ipſis 1(*a*), 1(*b*), 1(*c*), 1(*d*). Et eſto rationis *c* ad *b*, logarithmus *e*, & rationis *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Demonſtr. p.

Terminus *a*, vel minor eſt, vel maior ...
ſum *a*, vel minor eſt, vel maior, ...
quàm *b*: & minor, quàm *c* ...

hypoth.	*a*, *b*, *c*, *d*: arith ...
14. *b.*	1(*a*), 1(*b*), 1 ...
ſup.	1(*a*): maior ...
88. *b.*	1(*a*); 1(*b*) ...

65. h. | 1(*a*); 1(*b*): logarithmus *e*.
65. h. | 1(*c*); 1(*d*): logarithmus *f*.
12. h. | 1(*a*): maior, quàm 1(*b*).
def. 13 b | 1(*c*): maior, quàm 1(*d*).
8. 5. | 1(*a*); 1(*d*): maior, quàm 1(*a*); 1(*c*).
99. h. | 1(*a*); 1(*c*): maior, quàm *e*; *f*.
99. h. | *e*; *f*: maior, quàm 1(*b*); 1(*d*).
8. 5. | 1(*b*); 1(*d*): maior, quàm 1(*b*); 1(*c*).
13. 5. | 1(*a*); 1(*d*): maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. | *e*; *f*: maior, quàm 1(*b*); 1(*c*).
12. h. | 1(*a*); 1(*d*): *d*; *a*.
12. h. | 1(*b*); 1(*c*): *c*; *b*.
13. 5. | *d*; *a*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. | *e*; *f*: maior, quàm *c*; *b*.
91. h. | *df*: maior, quàm *ae*.
91. h. | *eb*: maior, quàm *fc*.

hypoth. Et quoniam *f*, logarithmus eſt rationis *c* ad *d*:
73. h. ergo *df*, logarithmus eſt rationis *c* ad *d*, totu-
hypoth. plicatæ, quotus eſt *d*. item quoniam *e*, logari-
73. h. thmus eſt rationis *a* ad *b*: ergo *ae*, logarithmus
eſt ra[illegible] eſt *e*. Et
74. h. [illegible]a, quo-
[illegible]tam quo-
[illegible]: ergo ra-
[illegible]depreſſior
[illegible] eſt *d*. eſt

Hy-

def.2.4. Ergo maior eſt ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*. Quod &c.

73. *h.* Similiter oſtendetur, quod *eb*, logarithmus eſt rationis *a* ad *b*, totuplicatæ, quotus eſt *b*: & *fc* logarithmus *c* ad *d* totuplicatæ, quotus eſt *c*: ſed
ſup. eſt *eb*, maior, quàm *fc*: ergo ratio *a* ad *b* totu-
71. *h.* plicata quotus eſt *b*, altior eſt, quàm *c* ad *d* totu-
hypoth. plicata quotus eſt *c*. & eſt *a* minor, quàm *b*; &
def.5.h. *c* minor, quàm *d*: ergo minor eſt ratio *a* ad *b* to-
def.p.4. tuplicata, quotus eſt *b*, quàm ratio *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*. Quod &c.

Demonſtr.2.

Eſto *a*, minor, quàm *b*: & maior, quàm *c*.
hypoth. ergo *c*, *d*, *a*, *b*, ſunt quatuor numeri arithmeticè
def.5.h. diſpoſiti; quorum *c*, minor eſt, quàm *d*; & mi-
ſup. nor, quàm *a*. Et ratio *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*, maior eſt, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *b*: & *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*, minor, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*. Quod &c.

Demonſtr.3.

Eſto *a*, maior, quàm *b*, & minor, quàm *c*.
hypoth. Ergo *b*, *a*, *d*, *c*, ſunt quatuor numeri arithmeti-
bef.5.h. cè diſpoſiti; quorum *b*, minor, quàm *a*; & mi-
ſup. nor, quàm *d*. Et ratio *b* ad *a* totuplicata, quotus eſt *b*, maior, quàm *d* ad *c* totuplicata, quotus

tus eſt *c*: & *b* ad *a* totuplicata, quotus eſt *a*, mi-
1.3. nor, quàm *d* ad *c* totuplicata, quotus eſt *d*. Et conuertendo *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*, maior, quàm *c* ad *d*, totuplicata, quotus eſt *d*: & *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *b*, minor, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*. Quod &c.

Demonſtr. 4.

Eſto *a* maior vtriſque *b*, & *c*: eritque *d* mi-
def.5.h. ſup. nor vtriſque *c*, & *b*. Sunt ergo quatuor numeri *d*, *c*, *b*, *a* diſpoſiti arithmeticè: quorum ratio *d* ad *c* totuplicata, quotus eſt *d*, maior, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus eſt *a*: & *d* ad *c* totuplicata, quotus eſt *c*, minor, quàm *b* ad *a* totuplicata,
2.3. quotus eſt *b*. Et conuertendo, *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*, minor, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*: & *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *c*, maior, quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *b*. Quod &c. Quare &c.

Theor. 89. *Prop.* 101.

SI fuerint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti, & primus maior ſecundo; fuerint autem & alij duo numeri, quintus ad ſextum, maior quàm vt primus ad quartum: erit primi ad ſecundum totuplicata ratio, quotus eſt quintus, maior, quàm tertij ad quartum totuplicata ratio, quotus eſt ſextus.

Hypoth.

Sint quatuor arithmeticè diſpoſiti numeri *a*, *b*, def.5.h. *c*, *d*: & ſit primus *a*, maior ſecundo *b*; ideoque etiam tertius *c*, maior quarto *d*: & ſint alij duo, quintus *e* ad ſextum *f*, maior quàm *a* ad *d*.

Dico rationem *a* ad *b* totuplicatam, quotus eſt *e*, maiorem eſſe ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*.

Præpar.

Rationis *a* ad *b*, logarithmus aſſumatur *g*: & rationis *c* ad *d*, logarithmus *h*.

Demonſtr.

100.h. Ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *a*, maior eſt ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*: & hypoth. ambæ ſunt maioris inæqualitatis: ergo ratio *a* ad def p.4. *b* totuplicata, quotus eſt *a*, altior eſt, quàm *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *d*. Eſt autem rationis *a* 73.h. ad *b* totuplicatæ, quotus eſt *a*, logarithmus *ag*: & rationis *c* ad *d* totuplicatæ, quotus eſt *d*, logahypoth. rithmus *hd*: ergo *ag* maior eſt, quàm *hd*. Et quop.3. 9.h. niam *e* ad *f* maior eſt, quàm vt *a* ad *d*: permutando, *e* ad *a*, maior eſt, quàm vt *f* ad *d*. Sed *e* ad *a*, eſt vt *eg* ad *ag*: & *f* ad *d*, vt *fh* ad *dh*. 13.5. Ergo *eg* ad *ag*, maior eſt, quàm vt *fh* ad *dh*: & p.3. permutando, *eg* ad *fh*, maior, quàm vt *ag* ad *dh*. 73.h. Et eſt *eg*, logarithmus rationis *a* ad *b* totuplicatæ, quotus eſt *e*: & *fh*, logarithmus rationis *c* ad 71.h. *d* totuplicatæ, quotus eſt *f*. ergo ratio *a* ad *b*

totu-

totuplicata, quotus eſt *e*, altior eſt ratione *c* ad *d*
hypoth. totuplicata, quotus eſt *f*. Et vtraque maioris eſt
def.p.4. inæqualitatis. Ergo ratio *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *e*, maior eſt ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 90. Prop. 102.

SI fuerint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti, & primus minor ſecundo; fuerint autem & alij duo numeri, quintus ad ſextum, minor, quàm vt primus ad quartum: erit primi ad ſecundum totuplicata ratio, quotus eſt quintus, maior, quàm tertij ad quartum totuplicata ratio, quotus eſt ſextus.

Hypoth.

Sint quatuor numeri arithmeticè diſpoſiti, *a*, *b*,
def.5.b. *c*, *d*: & ſit *a*, minor, quàm *b*: ideoque etiam *c*, minor, quàm *d*: & ſit *e*, ad *f*, minor, quàm vt *a* ad *d*.

Dico *a* ad *b* totuplicatam rationem, quotus eſt *e*, maiorem eſſe ratione *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*.

Demonſtr.

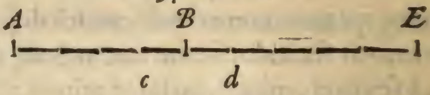
hypoth. Sunt enim *d*, *c*, *b*, *a*, arithmeticè diſpoſiti: & eſt
2. 3. *d*, maior, quàm *c*: & *f* ad *e*, maior, quàm *d* ad *a*:
101. *b.* ergo *d* ad *c* totuplicata, quotus eſt, *f* maior eſt, quàm *b* ad *a* totuplicata, quotus eſt *e*: & conuer-
2. 3. tendo *c* ad *d* totuplicata, quotus eſt *f*, minor,

quàm *a* ad *b* totuplicata, quotus eſt *e*. Quod &c.
Quare &c.

Probl. 13. *Prop.* 103.

DAta quantitate, dataque ratione inæqualitatis, inuenire terminos in data ratione, quorum differentia eſt quantitas data.

Hypoth.



Sit data quantitas *A B*, dataque ratio *c* ad *d*; & eſto *c*, maior, quàm *d*.

Oportet inuenire terminos in ratione *c* ad *d*, quorum exceſſus *A B*.

Conſtr.

Fiat *c*---*d*; *d*: *AB*; *BE*.

Dico *AE*; *EB*: *c*; *d*.

Demonſtr.

conſtr. | *AB*; *BE*: *c*---*d*; *d*.
2. *p.* | *AE*; *EB*: *c*; *d*. Quod &c.

Quare &c.

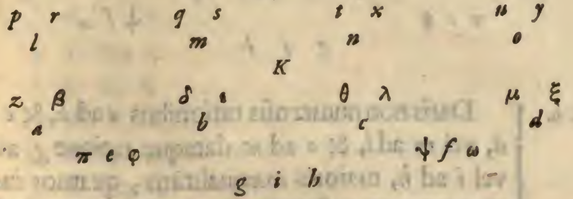
Theor. 91. *Prop.* 104.

SI quatuor quantitatum non numeroſas rationes habentium, harmonicè diſpoſitarum, prima maior fuerit, quàm vtralibet ſecunda, & tertia: logarithmus rationis

pri-

primæ ad ſecundam ad logarithmum tertiæ ad quartam, non erit maior, quàm vt prima ad tertiam, nec minor, quàm vt ſecunda ad quartam.

Hypoth.



Sunto quatuor quantitates harmonicè diſpoſitæ, *a*, *b*, *c*, *d*: quarum *a*, maior, quàm *b*, & maior, quàm *c*. & ſunto *a* ad *b*, & *c* ad *d*, rationes non numeroſæ. & rationis *a* ad *b*, eſto logarithmus *e*: rationis autem *c* ad *d*, logarithmus *f*.

Dico *e* ad *f*, non maiorem eſſe, quàm vt *a* ad *b*; nec minorem, quàm vt *c* ad *d*.

Suppoſito falſa alternatiua.

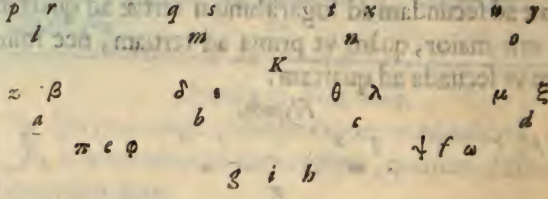
Eſto, ſi fieri poteſt, vel maior *e* ad *f*, quàm vt *a* ad *b*, ratione *g* ad *h*, maioris inæqualitatis, vel minor, quàm vt *c* ad *d*, ratione *g* ad *h*, maioris inæqualitatis.

Præpar.

Fiat *g*; *i*: *i*; *h*. Sumatur quantitas *K*.

Fiat *a*; *K*: *K*; *l*.
b; *K*: *K*; *m*.
c; *K*: *K*; *n*.
d; *K*: *K*; *o*.

Da-



77. *b.* Datis non numeroſis rationibus *a* ad *b*, & *c* ad *d*, vel *m* ad *l*, & *o* ad *n*: dataque ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*, maioris inæqualitatis, quatuor inueniantur numeroſæ rationes, *p* ad *q*, altior, quàm *l* ad *m*; & *r* ad *s* depreſſior: propiores æqualitati logarithmicæ, quàm vt in ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*.

88. *b.* Et quoniam *a* ad *b*, ratio eſt altior, quàm *c* ad
24. *b.* *d*: & ſunt *l*, *m*, *n*, *o*, reciprocè, ſicut *a*, *b*, *c*, *d*:
2. 3. etiam *l* ad *m*, ratio eſt altior, quàm *n* ad *o*. Itaq; ſi forte contingeret *r* ad *s*, non altior, quàm *n* ad
76. *b.* *o*: inueniatur altera *r* ad *s*, depreſſior quidem, quàm *l* ad *m*; ſed ei propior; atque altior, quàm
76. *b.* *n* ad *o*. Et ſimiliter inueniatur *t* ad *u*, depreſſior,
77. *b.* quàm *r* ad *s*; altior, quàm *n* ad *o*: necnon inueniatur *x* ad *y*, depreſſior, quàm *n* ad *o*; vt fiant *t* ad *u*, & *x* ad *y*, propiores æqualitati logarithmicæ, quàm vt in ratione *g* ad *i*, vel *i* ad *h*.

103. *b.* Dataque differentia *l*, *m*: datis quoque rationibus *p*, ad *q*, *r* ad *s*, *t* ad *u*, *x* ad *y*, inuenian-

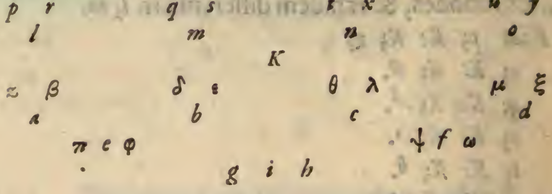
tur earumdem termini *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u*, *x*, *y*, eaſdem habentes rationes, & eamdem differentiam *l*, *m*.

Fiat *p*; *K*: *K*; ζ.
r; *K*: *K*; β.
q: *K*: *K*; δ.
s; *K*: *K*; ι.
t; *K*: *K*; θ.
x; *K*: *K*; λ.
u; *K*: *K*; μ.
y; *K*: *K*; ξ.

Et rationis ζ ad δ, logarithmus eſto π.
rationis β ad ι, logarithmus φ.
rationis θ ad μ, logarithmus ψ.
rationis λ ad ξ, logarithmus ω.

Demonſtr. commun.

hypoth. | *a*, *b*, *c*, *d*, ſunt harmonicè diſpoſitæ.
33. *h.* | *l*, *m*, *n*, *o*, arithmeticè diſpoſitæ.
hypoth. | *a*, maior, quàm *b*: & maior, quàm *c*.
24. *h.* | *l*, minor, quàm *m*: & minor, quàm *n*.
conſtr. | *p*, *q*; *l*, *m*; *r*, *s*; *t*, *u*; *n*, *o*; *x*, *y*: binæ, & binæ ſunt arithmeticè diſpoſitę, antecedentes minores conſequentibus.
def. 34. *h* | π: maior, quàm *e*. & *e*; maior, quàm φ.
ψ: maior, quàm *f*. & *f*: maior, quàm ω.
conſtr. | Et quoniam *g*, ad *i*, maior eſt logarithmicè, quàm vt ratio ζ ad δ, ad rationem β ad ι: ratio
12. 4. | autem ζ ad δ, ad rationem β ad ι, logarithmicè maior



81. b. maior eſt, quàm vt ad rationem *a* ad *b*: & ratio *z* ad *δ*, ad rationẽ *a* ad *b*, eſt logaritmicè, vt *π* ad
13.5. *e*: ergo *g* ad *i* eſt maior, quàm vt *π* ad *e*. Similiter oſtendetur *g* ad *i*, maior, quàm *e* ad *φ*: & maior, quàm *ψ* ad *f*: & maior, quàm *f* ad *ω*.

conſtr. Deinde quoniam *p* ad *q*, vel *z* ad *δ* ratio eſt
ſup. altior, quàm *l* ad *m*, vel *a* ad *b*; & ſunt *z*, *δ*,
hypoth. *a*, *b* harmonicè diſpoſitæ; & eſt *a*, maior, quàm
7.5. *b*: oportet *z*, & *δ* maiores eſſe, quàm *a*, *b*. ſi enim eſſent æquales; eſſet ratio *z* ad *δ*, æquealta rationi *a* ad *b*: ſi verò eſſet *z*, minor, quàm *a*;
def.13 b ideoque & *δ*, minor, quàm *b*; eſſet ratio *z* ad *δ*,
88. b. depreſſior, quàm *a* ad *b*: contra aſſumptum. Similiter oſtendetur, quòd *a*, maior eſt, quàm *β*; & *b*, quàm *ε*: item *θ*, maior, quàm *c*; & *μ*, quàm *d*: & *c*, quàm *λ*; & *d*, quàm *ξ*.

Suppoſitio falſa prima.

Eſto *e* ad *f*, maior, quàm *a* ad *c*: ſi poteſt.

De-

Demonſtr. p.

prӕpar. | e; f: a; c,+g; i,+i; h.
def. 5. 6. | e; φ,+φ; ψ,+ψ; f: e; f.
11. 5. | e; φ,+φ; ψ,+ψ; f: a; c,+g; i,+i; h.
ſup. | e; φ: minor, quàm g; i.
ſup. | ψ; f: minor, quàm i; h.
4. 3. | φ; ψ: maior, quàm a; c. ſi enim eſſet eadem, vel minor: eſſet e; f: minor, quàm a; c,+g; h. contra aſſumptum.
prӕpar. | Sunt autem β, ι, θ, μ, harmonicè diſpoſitæ
25. b. | quantitates, numeroſaſque habentes rationes; & proportionales ſicut quidam termini è ſerie har-
prӕpar. | monica naturali ab vnitate: quorum rationis β ad ι, logarithmus eſt φ; & rationis θ ad μ, loga-
ſup. | rithmus eſt ψ. Eſt autem ſicut r ad s ratio altior, quàm t ad u: ſic β ad ι, altior, quàm θ ad μ: &
ſup. | eſt β, maior, quàm ι; ideoque & θ, maior,
99. b. | quàm μ. Ergo β ad θ, maior eſt, quàm φ ad ψ.
13. 5. | Ergo β ad θ, maior eſt, quàm a ad c. *contra* 8. 5.

Ergo e ad f, non maior eſt, quàm a ad c. Quod &c.

Suppoſ. falſ. 2.

Eſto e ad f, minor, quàm b ad d, ſi poteſt.

Demonſtr. 2.

prӕpar. | e; f,+g; h: b; d.
ſup. | π; e: minor, quàm g; i.
ſup. | f; ω: minor, quàm i; h.
ſup. | π; ω: minor, quàm e; f,+g; h.

 π; ω:

13. 5. π; ω: minor, quàm b; d.

Sunt autem $\zeta, \delta, \lambda, \xi$, harmonicè diſpoſitæ,
præpar. numeroſas rationes habentes; & proportionales,
25. b. ſicut quidam termini è ſerie harmonica naturali
præpar. ab vnitate: quorum rationis ζ ad δ, logarithmus
eſt π; & rationis λ ad ξ, logarithmus eſt ω: &
ſup. eſt ζ ad δ ratio altior, quàm a ad b; ſicut p ad
q, altior, quàm l ad m: & l ad m altior, quàm
n ad o, vel c ad d: & c ad d, altior, quàm λ ad
ξ; ſicut n ad o, altior, quàm x ad y: ergo ζ ad
δ, altior eſt, quàm λ ad ξ: & eſt ζ, maior, quàm
99. b. δ; & λ, maior, quàm ξ: Ergo π ad ω maior
13. 5. eſt, quàm δ ad ξ. Ergo δ ad ξ minor eſt, quàm
b ad d. *contra* 8. 5.

Ergo e ad f, non minor eſt, quàm b ad d. Quod &c.
Quare &c.

Theor. 92. Prop. 105.

QVatuor arithmeticè diſpoſitarum quantitatum, ſi prima ad vltimam, fuerit vt numerus ad numerum: erit primæ ad ſecandam totuplicata ratio, quotus eſt homologus primæ, maior, quàm tertiæ ad quartam totuplicata ratio, quotus eſt homologus quartæ. quòd ſi ſecunda ad tertiam fuerit vt numerus ad numerum: erit primæ ad ſecundam totuplicata ratio, quotus eſt homologus ſecundæ, minor, quàm tertię ad quartam totuplicata, quotus eſt homologus tertiæ.

Hy-

Hypoth.

Sunto quatuor arithmeticè diſpoſitæ quantitates *A, B, C, D.* & eſto, vel alterutrum, vel vtrumque iſtorum, videlicet: *A* ad *D,* vt numerus *a,* ad numerum *d*: & *B* ad *C,* vt numerus *b,* ad numerum *c.*

Dico rationem *A* ad *B* totuplicatam, quotus eſt *a,* maiorem eſſe ratione *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*: & rationem *A* ad *B* totuplicatam, quotus eſt *b,* minorem ratione *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c.*

Præpar. commun.

Sumatur rationalis *u*: & per quantitates denominetur arithmeticè diſpoſitas, vt fiant fractiones
13.h. *u (A), u (B), u (C), u (D),* harmonicè diſpoſitæ. Sitque rationis *A* ad *B* logarithmus *e*: & rationis *C* ad *D,* logarithmus *f.*

Demonſtr. p.

Quantitatum *A, B, C, D,* vel duæ tantùm extremæ *A, D,* erunt vt numeri; vel duæ tantùm mediæ *B, C*: vel binæ tantùm extremæ inuicem *A, D*; & mediæ inuicem *B, C*: vel tres inuicem ſunt vt numeri.

4.8. Sunto tres inuicem *A, B, C,* vt numeri: & aſſumantur tres numeri *g, h, i* proportionales, vt
def.5.h. *A, B, C*: quod ſi *A,* minor eſt, quàm *B*; etiam *C,*
2.p. minor eſt, quàm *D*; & *g* minor, quàm *h.* & per homologiam, eſt defectus *g, h,* ad *i,* vt defectus *A, B,* ad *C.* addatur defectus *g, h,* numero *i,* &
2.p. fiat numerus *l.* erit ergo componendo vt *l* ad *i,*

def.5.h. ita *D* ad *C*. Si verò *A*, maior eſt, quàm *B*: profectò *C*, maior eſt, quàm *C*--- *D*, vel quàm *A*
2.p. --- *B*: & per homologiam, ſicut *C*, maior eſt, quàm *A*--- *B*, ita *i*, maior eſt, quàm *g*--- *h*. Auferatur itaque *g*--- *h*, ab *i* numero; & relinquatur *l*: &
2.p. erit, diuidendo, *C* ad *D*, vt *i* ad *l*.

Quare *A*, *B*, *C*, *D* ſunt proportionales inuicem, vt numeri, *g*, *h*, *i*, *l*: & numeri *g*, *h*, *i*, *l*, ſunt arithmeticè diſpoſiti: quorum ratio *g* ad *h*
100. h. totuplicata, quotus eſt *g*, maior eſt, quàm ratio *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *l*: & ratio *g* ad *h* totuplicata, quotus eſt *h*, minor, quàm ratio *i* ad *l*
6.4. totuplicata, quotus eſt *i*. Sed *g* ad *h* totuplicata ratio, quotus eſt *g*, ad eamdem totuplicatam, quotus eſt *a*, eſt logarithmicè, vt *g* ad *a*: & *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *l*, eſt logarithmicè ad eamdem totuplicatam, quotus eſt *d*, vt *l* ad *d*. Et quoniam *g* ad *l* eſt vt *A* ad *D*: & *A* ad *D*, vt
11.5. *a* ad *d*: ergo *g* ad *l*, eſt vt *a* ad *d*: & permutan-
2.p. 15.4. do *g* ad *a*, vt *l* ad *d*. Ergo ratio *g* ad *h* totuplicata, quotus eſt g, ad eamdem totuplicatam, quotus eſt *a*, eſt vt *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *l*,
18.4. ad eamdem totuplicatam, quotus eſt *d*. Ergo ſi *g* ad *h* totuplicata, quotus eſt *g*, altior eſt, quàm *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *l*, etiam *g* ad *h* totuplicata, quotus eſt *a*, altior eſt, quàm *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *d*: ſi depreſsior, depreſsior.

ergo

100.*h.* | ergo ſicut *g* ad *h* totuplicata; quotus eſt *g*, maior eſt, quàm *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *l*; ſiue
def.5.*h.* | ſint *g* ad *h*, & *i* ad *l* rationes maioris inæqualitatis, ſiue ſint minoris ambæ: erit & *g* ad *h* totu-
deff. 1. & 2.4. | plicata, quotus eſt *a*, maior, quàm *i* ad *l* totuplicata, quotus eſt *d*. Et eſt *g* ad *h*, eadem, quæ *A* ad *B*: & *i* ad *l*, eadem, quæ *C* ad *D*. ergo *A* ad *B* totuplicata ratio, quotus eſt *a*, maior eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*. Quod &c.

Simili prorus demonſtratione oſtendetur, quòd ratio *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*, minor eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*. Quod &c.

*Demonſtr.*2.

Sunto vel duo tantùm extremi *A*, *D*, vt numeri; vel duo tantùm medij *C*, *D*; vel bini, & bini *A*, *D*, & *B*, *C*; non autem tres, aut quatuor. profectò vel eſt quantitas *A*, minor, quàm *B*, vel maior: & rurſum quantitas *A*, minor, quàm *C*, vel maior.

Eſto *A*, minor, quàm *B*, & minor, quàm *C*.

14. *h.* | *u*(*A*), *u*(*B*), *u*(*C*), *u*(*D*), ſunt harmonice diſpoſiti.
12. *h.* | *u*(*A*): maior, quàm *u*(*B*).
12. *h.* | *u*(*A*): maior, quàm *u*(*C*).
88. *h.* | *u*(*A*); *u*(*B*): altior, & maior, quàm *u*(*C*); *u*(*D*).
78. *h.* | *u*(*A*); *u*(*B*): logarithmus *e*.
78. *h.* | *u*(*C*); *u*(*D*): logarithmus *f*.
def.13 *h* | *u*(*C*): maior, quàm *u*(*D*).
8. 5. | *u*(*A*); *u*(*D*): maior, quàm *u*(*A*); *u*(*C*).

u(*A*);

104. *h.* | $u(A)$; $u(C)$: non minor, quàm e; f.
104. *h.* | e; f: non minor, quàm $u(B)$; $u(D)$.
8. 5. | $u(B)$; $u(D)$: maior, quàm $u(B)$; $u(C)$.
13. 5. | $u(A)$; $u(D)$; maior, quàm e; f.
13. 5. | e; f: maior, quàm $u(B)$; $u(C)$.
12. *h.* | $u(A)$; $u(D)$: D; A: d; a.
12. *h.* | $u(B)$; $u(C)$: C; B: c; b.
13. 5. | d; a: maior, quàm e; f.
13. 5. | e; f: maior, quàm c; b.
91. *h.* | df: maior, quàm ae.
91. *h.* | eb: maior, quàm fc.

præpar. Et quoniam f, logarithmus eſt rationis C ad D: ergo df, logarithmus eſt rationis C ad D totuplicatæ, quotus eſt d. item quoniam e, logarithmus eſt rationis A ad B: ergo ae, logarithmus eſt rationis A ad B totuplicatæ, quotus eſt a. Similiter fc, logarithmus eſt rationis C ad D totuplicatæ, quotus eſt c: & eb, logarithmus, rationis A ad B totuplicatæ, quotus eſt b. Sicut ergo ae, minor eſt, quàm df: ſic depreſſior eſt A ad B totuplicata, quotus eſt a, quàm C ad D totuplicata, quotus eſt d. Item ſicut eb, maior eſt, quàm fc: ſic A ad B totuplicata, quotus eſt b, altior eſt, quàm C ad D totuplicata, quotus eſt c. Sunt autem A ad B, & C ad D, minoris inęqualitatis rationes, quarum depreſſior altiore maior eſt. Ergo A ad B totuplicata, quotus eſt a, maior

80. *h.* 81. *h.* *hypoth.* *deff. 1. & 2. 4.*

ior eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*: & *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*, minor, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*. Quod &c.

Demonſtr. 3.

Eſto *A* minor, quàm *B*, & maior, quàm *C*. Ergo *C*, *D*, *A*, *B*, ſunt quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitè; quarum *C*, minor, quàm *D*, *def.5.h. ſup.* & minor, quàm *A*. Et ratio *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*, maior eſt, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*. & *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*, minor, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*. Quod &c.

Demonſtr. 4.

Eſto *A*, maior, quàm *B*, & minor, quàm *C*. Ergo *B*, *A*, *D*, *C*, ſunt quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, quarum *B* minor, quàm *A*; *def.5.h. ſup.* & minor, quàm *D*. ideoque *B* ad *A* totuplicata ratio, quotus eſt *b*, maior eſt, quàm *D* ad *C* totuplicata, quotus eſt *c*: & *B* ad *A* totuplicata, quotus eſt *a*, minor, quàm *D* ad *C* totuplicata, quotus eſt *d*. Ergo conuertendo, *A* ad *B* totupli- *2. 3.* cata, quotus eſt *b*, minor eſt, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*: & *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*, maior, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*. Quod &c.

Demonſtr. 5.

Eſto *A* maior, quàm *B*, & maior, quàm *C*. Ergo *D*,

C, *B*, *A*,

C, *B*, *A*, ſunt quantitates arithmeticè diſpoſitæ,
def.5.h. quarum *D* minor, quàm *C*, & minor, quàm *B*.
ſup. quarum ratio *D* ad *C* totuplicata, quotus eſt *d*, maior eſt, quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus eſt *a*: & *D* ad *C* totuplicata, quotus eſt *c*, minor,
12. 3. quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus eſt *b*: Ergo conuertendo, *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *d*, minor eſt, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *a*: & *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *c*, maior, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *b*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 93. Prop. 106.

SI fuerint quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, & prima minor ſecunda; fuerint autem & duo numeri prior ad poſteriorem, minor, quàm vt prima quantitas ad quartam: erit primæ ad ſecundam totuplicata ratio, quotus eſt prior numerus, maior, quàm tertiæ ad quartam totuplicata, quotus eſt poſterior.

Hypoth.

Sint quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, *A*, *B*, *C*, *D*: & ſit *A*, minor, quàm *B*: ideoque etiam *C*, minor, quàm *D*: & ſit *e* numerus ad numerum *f*, minor, quàm vt *A* ad *D*.

Dico *A* ad *B* totuplicatam, quotus eſt *e*, maiorem eſſe, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *f*.

Pr.e-

Præpar.

Denominetur u, per quantitates arithmeticè
13. *h.* diſpoſitas A, B, C, D, vt fiant fractiones harmonicè diſpoſitæ, $u(A)$, $u(B)$, $u(C)$, $u(D)$. Et eſto rationis $u(A)$ ad $u(B)$, logarithmus g: & rationis $u(C)$ ad $u(D)$, logarithmus h.

Demonſtr.

Vel $u(A)$, maior eſt, quàm $u(C)$; vel minor.
*def.*13.*h.* Si $u(A)$, maior eſt, quàm $u(C)$: etiam $u(B)$, ma-
88. *h.* ior eſt, quàm $u(D)$: & $u(A)$ ad $u(B)$, ratio eſt al-
*def.p.*4. tior, & maior, quàm $u(C)$ ad $u(D)$. Ergo g ad h
104. *h.* non maior eſt, quàm vt $u(A)$ ad $u(C)$.
12. *h.* $u(A)$; $u(C)$: C; A.
12. *h.* C: maior, quàm A.
13. 5. g; h: non maior, quàm C; A.
8. 5. D; A: maior, quàm C; A.
13. 5. g; h: minor: quàm D; A.
2. 3. f; e: maior, quàm D; A.
13. 5. g; h: minor, quàm f; e.
91. *h.* ge: minor, quàm fh.

Eſt autem g logarithmus rationis $u(A)$ ad
12. *h.* $u(B)$, vel B ad A: ideoque ge, logarithmus eſt
80. *h.* rationis B ad A totuplicatæ, quotus eſt e. item fh, logarithmus eſt rationis D ad C totuplicatæ,
81. *h.* quotus eſt f. Ergo ſicut ge, minor eſt, quàm fh: ſic totuplicata ratio B ad A, quotus eſt e, depreſſior eſt, quàm totuplicata D ad C, quotus eſt f.

hypoth. & eſt *B*, maior, quàm *A*, & *D* maior, quàm *C*:
def.p.4. ergo totuplicata ratio *B* ad *A*, quotus eſt *e*, minor eſt, quàm totuplicata *D* ad *C*, quotus eſt *f*.
2. 3. & conuertendo, totuplicata *A* ad *B*, quotus eſt *e*, maior, quàm totuplicata *C* ad *D*, quotus eſt *f*. Quod &c.

def.13.h Si *u*(*A*), minor eſt, quàm *u*(*C*): etiam *u*(*B*), minor eſt, quàm *u*(*D*): & eſt ratio *u*(*C*) ad *u*(*D*), altior, quàm *u*(*A*) ad *u*(*B*): & eſt *u*(*C*), maior vtralibet *u*(*D*), & *u*(*A*).
88. *h*.

104. *h*. *h*; *g*: non minor, quàm *u*(*C*); *u*(*A*).
12. *h*. *u*(*C*); *u*(*A*): *A*; *C*.
13. 5. *h*; *g*: non minor, quàm *A*; *C*.
8. 5. *A*; *C*: maior, quàm *A*; *D*.
hypoth. *A*; *D*: maior, quàm *e*; *f*.
13. 5. *h*; *g*: maior, quàm *e*; *f*.
91. *h*. *hf*: maior, quàm *eg*.
ſup. Totuplicata *A* ad *B*, quotus eſt *e*, maior, quàm totuplicata *C* ad *D*, quotus eſt *f*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 94. Prop. 107.

SI fuerint quatuor quantitates arithmeticè diſpoſitæ, & prima, maior, quàm ſecunda: fuerint autem & duo numeri, prior ad poſteriorem maior, quàm vt prima quantitas ad quartam: erit primæ ad ſecundam totuplicata ratio, quotus eſt prior numerus, maior, quàm tertię ad quartam

tam totuplicata, quotus eſt poſterior.

Hypoth.

Sint quatuor quantitates *A*, *B*, *C*, *D*, arithmeticè diſpoſitæ: & ſit *A*, maior, quàm *B*; ideoque etiam *C*, maior, quàm *D*: & ſit *e* numerus ad numerum *f*, maior, quàm vt *A* ad *D*.

Dico *A* ad *B* totuplicatam, quotus eſt *e*, maiorem eſſe, quàm *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *f*.

Demonſtr.

Sunt enim quatuor quantitates arithmeticè
hypoth. diſpoſitæ *D*, *C*, *B*, *A*: & eſt *D* minor, quàm *C*:
2. 3. & *f* ad *e*, minor eſt, quàm vt *D* ad *A*. ergo *D*
106. *h.* ad *C* totuplicata ratio, quotus eſt *f*, maior eſt,
2. 3. quàm *B* ad *A* totuplicata, quotus eſt *e*. Et conuertendo, *C* ad *D* totuplicata, quotus eſt *f*, minor, quàm *A* ad *B* totuplicata, quotus eſt *e*. Quod &c.

Quare &c.

Perilluſt. & Excellentiſs. D. Io. Dominico Caſſino Aſtronomo D. S. Petrus Mengolus S. D.

NVmquam mihi ſatis credo, Vir Excellentiſs. cum publicanda conſcribo; ideoque meritò nec omninò ſcholaribus credendum puto: quorum licet ope me fateor plurimùm profeciſſe; non tamen auctoritate oportuit confirmari. Tù verò, qui ſcis, & potes, tuis in me multis hucuſque poſitis, hoc addas officium velim: praua, ſi quæ ſunt, emendes primùm: in ijs, quæ male poſita ſunt, conſilio adiuues; in cæteris, mihi duplices intellectum. Quod vt præſtes faciliùs, retexam breuiter huiuſce operis narrationem: quam cum legeris, præfationemque ad lectorem percurreris; plurima quidem curſim prætereundo intelligere; paucis verò difficilioribus lectis attentiùs, demonſtratisq́ʒ, poſsis de toto volumine ſententiam ferre.

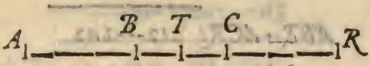
Ante annos duodecim, occaſione cuiuſdam problematis mihi propoſiti à D. Io. Antonio Rocca Regienſi, de figura vnilinea deſcribenda, quæ ſecaret ellipſim in duobus punctis innumerabiles eiuſmodi figuras excogitaui, quas tunc per Geometriam indiuiſibilium quadrabam, adhibita tamen priùs hoc lemmate.

Lem-

Lemma.

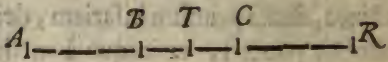
Data recta linea, diuiſa primùm bifariam, deinde non bifariam in duobus punctis, vtrimque à medio puncto æqualiter diſtantibus: aſſignatiſque vnius eiuſdem gradus poteſtatibus abſciſſarum; necnon aliis eiuſdem gradus poteſtatibus reſiduarum: inuenire cui ſit æquale aggregatum ex duobus productis ſynonymis, ſub poteſtatibus abſciſſarū aſſignatis, per ſuarum aſſignatas poteſtates reſiduarum.

Eſt autem hoc lemma affine illi, quod recitat Bonauentura Cauallerius b. m. præceptor meus ex Io. Beugrand: quod idcircò in expoſitione placet imitari.



Sit recta *AR*, diuiſa bifariam in *T*, & non bifariam in punctis *C*, *B*, æqualiter hinc inde à *T* diſtantibus. Oportet inuenire, cui ſit æquale aggregatum productorum ſynonymorum ſub poteſtatibus partium inæqualium *AB*, *BR*, & *AC*, *CR*. Vt autem breuiori via id obtineamus, procedemus per Algebram Specioſam, partes *AT*, *TR*, vocantes *t*: & partes *BT*, *TC*, vocantes *a*. Erunt ergo *AB*, *CR*, *t --- a*: & erunt *AC*, *BR*, *t+a*. Aſſignatis itaque primis poteſtatibus abſciſſarum *AB*, *AC*, necnon primis reſiduarum *BR*, *CR*; volens inuenire cui æquetur ſumma productorum ſub primis poteſtatibus *ABR*, *ACR*, ſtatim ducendo *t---a* per *t+a* produco vnum: & ducen-

do



do $t+a$ per $t-a$, produco alterum, quorum ſumma, $t2$ $-2a2$.

Exemplum primum in Vniprimis.

AB: $t-a$	*AC*: $t+a$
BR: $t+a$	*CR*: $t-a$
ABR: $t2-a2$	*ACR*: $t2-a2$
	$t2-a2$

ABR+*ACR*: $2t2-2a2$

Vnde ſequitur aggregatum productorum ſub primis poteſtatibus *ABR*, *ACR*, ęquale eſſe, duplæ ſecundæ poteſtati *AT*, dempta dupla ſecunda *TC*.

Quod ſi aſſignatis ſecundis poteſtatibus abſciſſarum *AB*, *AC*, & primis reſiduarum *BR*, *CR*, velim ſcire cui æquetur ſumma productorum ſub poteſtatibus ſecundis *AB*, & prima *BR*, & ſub ſecunda *AC* & prima *CR*: effingo ſecundam poteſtatem à radice $t-a$, quàm duco in primam $t+a$; vt fiat vnus productus: item effingo ſecundam $t+a$, quàm duco in primam $t-a$; vt fiat alter productus: quorum ſummam inuenio $2t3 - 2ta2$.

Exem-

Exemplum 2. in Biprimis.

AB: $t2 --- 2ta + a2$
BR: $t + a$

$t3 --- 2t2a + ta2$
$+ t2a --- 2ta2 + a3$

ABR: $t3 --- t2a --- ta2 + a3$

AC: $t2 + 2ta + a2$
CR: $t --- a$

$t3 + 2t2a + ta2$
$--- t2a --- 2ta2 --- a3$

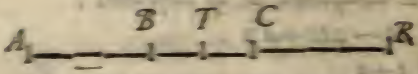
ACR: $t3 + t2a --- ta2 --- a3$
$t3 --- t2a --- ta2 + a3$

ABR + ACR: $2t3 --- 2ta2.$

Vnde manifeſtum eſt aggregatum productorum ſub poteſtatibus, ſecunda *AB* & prima *BR*, & ſub ſecunda *AC* & prima *CR*, æquale eſſe duplæ poteſtati tertiæ *AT*, dempto duplo producto ſub prima *AT*, & ſecunda *TC*.

Similiter in cuiuslibet appellationis proportionalibus progrediendo, conſequemur optatum: vt exemplis ſubiectis liquidò apparet.

Exem-



Exemplum 3. in Triprimis.

AB: $t^3 - 3t^2a + 3ta^2 - a^3$
BR: $t + a$

$t^4 - 3t^3a + 3t^2a^2 - ta^3$
$\quad + t^3a - 3t^2a^2 + 3ta^3 - a^4$

ABR: $t^4 - 2t^3a + 2ta^3 - a^4$

AC: $t^3 + 3t^2a + 3ta^2 + a^3$
CR: $t - a$

$t^4 + 3t^3a + 3t^2a^2 + ta^3$
$\quad - t^3a - 3t^2a^2 - 3ta^3 - a^4$

ACR: $t^4 + 2t^3a - 2ta^3 - a^4$
$\quad t^4 - 2t^3a + 2ta^3 - a^4$

ABR+ACR: $2t^4 - 2a^4$.

Exemplum 4. in Biſecundis.

AB: $t^2 - 2ta + a^2$
BR: $t^2 + 2ta + a^2$

$t^4 - 2t^3a + t^2a^2$
$\quad + 2t^3a - 4t^2a^2 + 2ta^3$
$\quad\quad + t^2a^2 - 2ta^3 + a^4$.

$ABR: t^4 - 2t^2a^2 + a^4$

Similiter $ACR: t^4 - 2t^2a^2 + a^4$

$ABR + ACR: \quad 2t^4 - 4t^2a^2 + 2a^4.$

Exemplum 5. in Quadriprimis.

$AB: \quad t^4 - 4t^3a + 6t^2a^2 - 4ta^3 + a^4$

$BR: \quad t + a$

$$t^5 - 4t^4a + 6t^3a^2 - 4t^2a^3 + ta^4$$
$$+ t^4a - 4t^3a^2 + 6t^2a^3 - 4ta^4 + a^5$$

$ABR: t^5 - 3t^4a + 2t^3a^2 + 2t^2a^3 - 3ta^4 + a^5$

$AC: \quad t^4 + 4t^3a + 6t^2a^2 + 4ta^3 + a^4$

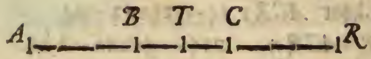
$CR: \quad t - a$

$$t^5 + 4t^4a + 6t^3a^2 + 4t^2a^3 + ta^4$$
$$- t^4a - 4t^3a^2 - 6t^2a^3 - 4ta^4 - a^5$$

$ACR: t^5 + 3t^4a + 2t^3a^2 - 2t^2a^3 - 3ta^4 - a^5$

$t^5 - 3t^4a + 2t^3a^2 + 2t^2a^3 - 3ta^4 + a^5$

$ABR + ACR: \; 2t^5 + 4t^3a^2 - 6ta^4.$



Exemplum 6. in Triſecundis.

AB: $t3 - 3t2a + 3ta2 - a3$

BR: $t2 + 2ta + a2$

$t5 - 3t4a + 3t3a2 - t2a3$

$+ 2t4a - 6t3a2 + 6t2a3 - 2ta4$

$+ t3a2 - 3t2a3 + 3ta4 - a5$

ABR: $t5 - t4a - 2t3a2 + 2t2a3 + ta4 - a5$.

AC: $t3 + 3t2a + 3a2 + a3$

CR: $t2 - 2ta + a2$

$t5 + 3t4a + 3t3a2 + t2a3$

$- 2t4a - 6t3a2 - 6t2a3 - 2ta4$

$+ t3a2 + 3t2a3 + 3ta4 + a5$.

ACR: $t5 + t4a - 2t3a2 - 2t2a3 + ta4 + a5$

$t5 - t4a - 2t3a2 + 2t2a3 + ta4 - a5$

ABR+ACR: $2t5 - 4t3a2 + 2ta4$.

Similiter in Quintiprimis.

ABR+ACR: $2t6 + 10t4a2 - 20t2a4 - 2a6$.

In

In Quadriſecundis.

ABR+ACR: 2t6---2t4a2---2t2a4+2a6.

In Tritertijs.

ABR+ACR: 2t6---6t4a2+6t2a4---2a6.

In Sextiprimis.

ABR+ACR: 2t7+18t5a2---10t3a4---10ta6.

In Quintiſecundis.

ABR+ACR: 2t7+2t5a2---10t3a4+8ta6.

In Quadritertijs.

ABR+ACR: 2t7---6t5a2+6t3a4---2ta6.

In Septimiprimis.

ABR+ACR: 2t8+28t6a2---28t2a6---2a8.

In Sextiſecundis.

ABR+ACR: 2t8+8t6a2---30t4a4+8t2a6+2a8.

In Quintitertijs.

ABR+ACR: 2t8---4t6a2+4t2a6---2a8.

In Quadriquartis.

ABR+ACR: 2t8---8t6a2+12t4a4---8t2a6+2a8.

In Octauiprimis.

ABR+ACR: 2t9+40t7a2+28t5a4---56t3a6---14ta8.

In Septimiſecundis.

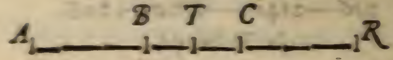
ABR+ACR: 2t9+16t7a2---28t5a4+10ta8.

In Sextitertijs.

ABR+ACR: 2t9---12t5a4+16t3a6---6ta8.

In Quintiquartis.

ABR+ACR: 2t9---8t7a2+12t5a4---8t3a6+2ta8.



In Noniprimis.

ABR+ACR: 2t10 + 5 4t8a2 + 8 4t6a4 — 8 4t4a6 — 5 4t2a8 — 2a10.

In Octauiſecundis.

ABR+ACR: 2t10 + 26t8a2 — 28t6a4 — 28t4a6 + 26t2a8 + 2a10.

In Septimitertijs.

ABR+ACR: 2t10 + 6t8a2 — 28t6a4 + 28t4a6 — 6t2a8 — 2a10.

In Sextiquartis.

ABR+ACR: 2t10 — 6t8a2 + 4t6a4 + 4t4a6 — 6t2a8 + 2a10.

In Quintiquintis.

ABR+ACR: 2t10 — 10t8a2 + 20t6a4 — 20t4a6 + 10t2a8 — 2a10.

Propoſitio.

In parallelogrammo ducta diametro, regula baſi: omnes ſexcuplæ vniprimæ ſub triangulis, ſunt æquales omnibus ſecundis poteſtatibus parallelogrammi.

Et omnes duodecuplæ biprimæ, omnibus tertijs poteſtatibus parallelogrammi.

Et omnes 20plæ triprimæ: necnon omnes 30plæ biſecundę; omnibus quartis poteſtatibus.

Et

Et omnes 30plæ quadriprimę: necnon omnes 60plæ triſecundæ; omnibus quintis poteſtatibus.

Et omnes 42plę quintiprimę: item omnes 105plę quadriſecundæ: & omnes 140plæ tritertiæ; omnibus ſextis poteſtatibus.

Et omnes 56plæ ſextiprimæ: item omnes 168plę quintiſecundæ: item omnes 280plæ quadritertiæ; omnibus ſeptimis poteſtatibus.

Et omnes 72plæ ſeptimiprimæ: item omnes 252plæ ſextiſecundæ: necnon omnes 504plæ quintitertiæ: & omnes 630plæ quadriquartæ; omnibus octauis poteſtatibus.

Et omnes 90plę octauiprimæ: & omnes 360plæ ſeptimiſecundę: & omnes 840plæ ſextitertiæ: & omnes 1260plæ quintiquartæ; omnibus nonis poteſtatibus.

Et omnes 110plæ noniprimæ: & omnes 495plæ octauiſecundæ: & omnes 1320plæ ſeptimitertiæ: & omnes 2310plæ ſextiquartæ: & omnes 2772plæ quintiquintæ; omnibus decimis poteſtatibus.

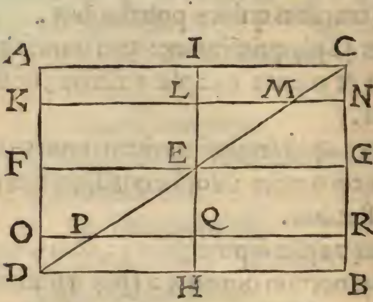
Et ſic deinceps in infinitum iuxta numeros tabulę quadratricum, vel quadraturarum, cõtinuatę quãtùm oportet.

Meth. Demonſtr.

Affinis eſt hæc propoſitio, tribus propoſitionibus, quas loco citato refert Cauallerius ex eodem Beugrand *Exerc.* 4. *prop.* 25, 26, & 27: Eademque illarum methodo demonſtrabitur, ex Lemmate præcedenti. Porrò ſatis puto ad oſtenſionem eiuſdem methodi, ex decem propoſitis, tria tantùm demonſtrare.

Hy-

Hypoth.



Eſto parallelogrammum *AB*, cuius diameter *CD*: diuidaturque *CD* biſariam in *E*: ducanturque per *E*, rectæ *FG*, *IH*, parallelogrammi *AB* lateribus parallelę: ducanturque hinc inde ab *E* diſtantes quantumlibet, ſed æqualiter, & intra quadratum, duæ *K L M N*, & *O P Q R*.

Dico ſub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes ſextuplas vniprimas, æquales eſſe, omnibus ſecundis poteſtatibus parallelogrammi *AB*.

Demonſtr. p.

Quoniam aggregatum ex vniprimis *KMN*, *OPR*, eſt æquale duplæ ſecundę poteſtati *KL*, dempta dupla ſecunda poteſtate *LM*: & *KN* ducta eſt vtcunque. Ergo ex omnibus vniprimis, ſub trapezio *AFEC*, & ſub triangulo *CEG*, & ex omnibus, ſub triangulo *EFD*, & ſub trapezio *EDBG*, aggregatum; quod eſt omnes vniprimæ

mæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*: eſt æquale omnibus duplis ſecundis poteſtatibus parallelogrammi *AE*, demptis omnibus duplis ſecundis poteſtatibus trianguli, *IEC*; ideſt omnibus ſimplis ſecundis poteſtatibus parallelogrammi *AH*, demptis omnibus ſecundis poteſtatibus, vtrorumq; triangulorum *IEC*, *DEH*.

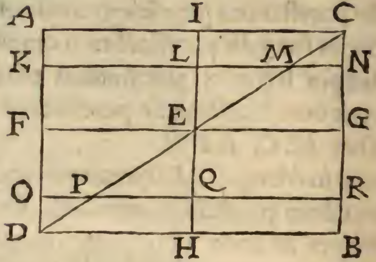
Sed qualium trianguli *IEC* omnes ſecundę poteſtates, ſunt vnitas: talium parallelogrammi *AE*, ſunt 3. Ideoq; qualium omnes ſecundæ poteſtates triangulorum *IEC*, *DEH*, ſunt 2: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi *AH*, ſunt 6. Et omnes vniprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt vtrorumque differentia, nempe 4: & omnes ſexcuplæ vniprimæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 24. Item qualium omnes ſecundæ poteſtates *AH*, ſunt 6: talium omnes ſecundæ poteſtates *AB*, ſunt 24. Ergo omnes ſextuplæ vniprimę, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt ęquales, omnibus ſecundis poteſtatibus *AB*. Quod &c.

Dico ſub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes duodecuplas biprimas, æquales eſſe, omnibus tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AB*.

Demonſtr.2.

Quoniam aggregatum ex biprimis *KMN*, *OPR*, eſt æquale duplæ tertiæ poteſtati *KL*, dempta dupla vniſecunda *KLM* (ideſt, dempto duplo producto ſub poteſtatibus, prima *KL*, & ſecunda *LM*). Oſtendetur ſimiliter vt ſupra, quòd omnes biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*,

ſunt



ſunt æquales omnibus tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AH*, demptis omnibus vniſecundis ſub poteſtatibus primis eiuſdem *AH*, & ſub ſecundis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*.

Qualium autem omnes ſecundæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt vnitas: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi ſunt 3: ideoque qualium omnes vniſecundæ ſub parallelogrammo *AE*, & ſub triangulo *IEC*, ſunt ſunt vnitas: talium omnes tertiæ poteſtates parallelogram mi *AE*, ſunt 3. & qualium omnes vniſecundæ ſub parallelogrammo *AH*, & ſub vtriſque triangulis *IEC*, *DEH*, ſunt 2: talium omnes tertiæ poteſtates *AH*, ſunt 6: & omnes biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt vtrorumque differentia, nempe 4: & omnes duodecuplę biprimæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 48. item qualium omnes tertiæ poteſtates *AH*, ſunt 6: talium omnes ter-

tiæ

tiæ poteſtates *AB*, ſunt 48. Ergo omnes duodecuplæ biprimæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales omnibus tertijs poteſtatibus *AB*. Quod &c.

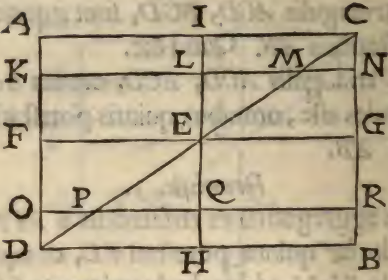
Dico ſub triangulis *ACD*, *BCD*, omnes 60plas triſecundas, æquales eſſe, omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AB*.

Demonſtr. 3.

Quoniam aggregatum ex triſecundis *KMN*, *OPR*, eſt æquale duplæ quintæ poteſtati *KL*, dempta quadrupla triſecunda *KLM*, addita dupla vniquarta *KLM*. oſtendetur ſimiliter vt ſupra, quod omnes triſecundæ ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AH*; demptis omnibus duplis triſecundis, ſub poteſtatibus tertijs *AH*, & ſub ſecundis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*, additis omnibus vniquartis ſub poteſtatibus primis *AH*, & ſub quartis vtrorumque triangulorum *IEC*, *DEH*.

Qualium autem omnes ſecundæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt 5: talium omnes ſecundæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 15. ideoque qualium omnes triſecundæ ſub tertijs poteſtatibus parallelogrammi *AE*, & ſub ſecundis trianguli *IEC*, ſunt 5: talium omnes quintæ poteſtates parallelogrammi *AE*, ſunt 15: atque talium omnes duplæ triſecundæ ſub *AE*, & ſub *IEC*, ſunt 10: atque differentia vtrarumque, eſt 5.

Rurſum, qualium omnes quartæ poteſtates trianguli *IEC*, ſunt 3: talium omnes quartæ poteſtates *AE*, ſunt



15. ideoque qualium omnes vniquartæ, ſub primis, *AE*, & quintis *IEC* poteſtatibus, ſunt 3: talium omnes quintæ poteſtates *AE*, ſunt 15. ſed talium oſtenſæ ſunt omnes quintæ *AE*, demptis omnibus duplis triſecundis, ſub *AE*, & ſub *IEC*, eſſe 5: ergo additis omnibus vniquartis, ſub *AE*, & ſub *IEC*, ſunt 8.

Sed qualium omnes quintæ *AE*, ſunt 15: talium omnes quintæ *AH* ſunt 30: & omnes quintæ *AH*, demptis omnibus duplis triſecundis, ſub *AH*, & ſub vtriſque *IEC*, *DEH*, additiſque omnibus vniquartis, ſub *AH*, & ſub vtriſque *IEC*, *DEH*, ſunt 16; nempe omnes triſecundæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt 16: & omnes 60plæ triſecundæ ſub ijſdem, ſunt 960. & qualium omnes quintæ poteſtates *AH*, ſunt 30: talium omnes quintæ poteſtates *AB*, ſunt 960. Ergo omnes 60plæ triſecundæ, ſub triangulis *ACD*, *BCD*, ſunt æquales, omnibus quintis poteſtatibus parallelogrammi *AB*. Quod &c. Quare &c.

His

His demonſtratis, cogitabam ſi poſſent aliæ quadraturæ inueniri ex inuentis compoſitæ, in quas inſignis aliqua reſoluatur; quemadmodum in triangula, parabolam Archimedes reſoluit. Et quæſiui primum de omnibus figuris, in quibus ordinatæ ad baſim, ſunt omnes poteſtates abſciſſarum, primæ, ſecundæ, tertiæ, & deinceps in infinitum: quas ex demonſtratis à Cauallerio loco citato, deprehendebam eſſe in ſerie harmonica naturali ab vnitate: earumque ſummam demonſtraui excreſcere in infinitum, in præfatione ad meum libellum, cui titulus, Nouæ Quadraturæ Arithmeticæ, ſeu de Additione Fractorum.

Deinde tentaui, ſi poſſent in vnam colligi ſummam figuræ, in quibus ordinatæ ad baſim, ſunt abſciſſæ primæ, & producti ſub primis abſciſsis, & reſiduarum poteſtatibus omnifariam, ideſt, abſciſſæ primæ, vniprimæ, vniſecundæ, vnitertiæ, vniquartæ, & deinceps in infinitum: quas colligere mihi ſucceſsit fæliciter, & æquales inuenire parallelogrammo, cuius ad eamdem baſim ordinatæ, ſunt omnes totæ; vt poteſt facilè colligi ex ſuprà demonſtratis, & ex 17. p. Nou. Quadr.

Item ſi poſſent colligi figuræ, in quibus ordinatæ ad baſim ſunt abſciſſæ ſecundæ, & producti ſub abſciſsis ſecundis, & reſiduarum poteſtatibus omnifariam, ideſt, abſciſſæ ſecundæ, biprimæ, biſecundæ, bitertiæ, biquartæ, & deinceps in infinitum: quas etiam colligere mihi ſucceſsit, & æquales inuenire triangulo, cuius ordinatæ ſunt omnes obſciſſæ. vt patet ex ſupra demonſtratis, & ex 8.2. Nou. Quadr.

Et generaliter inueni, figuram, in qua ordinatæ ſunt omnes poteſtates abſciſſarum, & deinceps omnes figuras, in quibus ordi-

natæ ſunt productæ ſub iiſdem poteſtatibus abſciſſarum, & ſub reſiduarum poteſtatibus omnifariam, ſimul aggregatas, æquales eſſe figuræ, in qua ordinatæ, ſunt omnes poteſtates abſciſſarum ordinis proximè inferioris. Verbi gratia, omnes abſciſſas tertias, additis omnibus triprimis, omnibus triſecundis, omnibus tritertiis, aliiſque omnibus triquotis; eſſe æquales, omnibus abſciſsis ſecundis. Item omnes abſciſſas quartas, additis omnibus quadriprimis, omnibus quadriſecundis, omnibus quadritertiis, omnibus quadriquartis, aliiſque omnibus quadriquotis; eſſe æquales omnibus abſciſsis tertiis, quod ita generaliter vt enunciatum eſt, & ex ſupra demonſtratis, & ex 5. 3. Nou. Quadr. poteſt manifeſtari.

Ipſam interim acceſsionem, quàm Geometriæ Indiuiſibilium feceram, prætериui: veritus eorum authoritatem, qui falſum putant ſuppoſitum, omnes rectas figuræ planæ infinitas, ipſam eſſe figuram planam: non quaſi hanc ſequens partem; ſed illam quaſi non prorſus indubiam deuitans: tentandi animo, ſi poſſem demum eamdem indiuiſibilium methodum, aut aliam æquiualentem nouis, & indubiis prorſus conſtituere fundamentis.

Mechanicis deinde ac Muſicis hucuſque imperfectis occupatus lucubrationibus, in eas quandoque veni demonſtrandarũ concluſionum anguſtias, vt per omnifariam hæc noſtra elementa, nouorum indigerem argumentorum. quæ priuatis tradita ſcriptis deliteſcebant, non inculta ſolùm, ſed & ita perperam poſita, vt quaſi ſpecialia Lemmata quorumdam mathematum, non valerent ad aliud. Animaduertebam etiam me non poſſe multùm in Mechanicis proficere, quas liberaliter profiteor; niſi ex vberiore

Geo-

Geometria, quàm quæ hucuſque ab Euclide, Apollonio, alijſque poſterioribus tradita eſſet.

Nuperrimè hoc anno, Adm. R.P. Fr. Stephanus de Angelis Ieſuattus, meus condiſcipulus, de indiuiſibilium Præceptoris noſtri Geometria omnium optimè meritus, cuius intellectus copiam, & fælicitatem, nunquam ſatis à me cõmendari poſſe verbis exiſtimo, mittebat ad me libellum ſuum De Infinitis Parabolis &c. legendum: cuius ex eruditione mirabili, melior, & vegetior factus Geometra; maximum hoc emolumentum percepi: vt præterita ſtudia reuerterentur in mentem; ordinemque, inter plura deinceps inuenta, poſtularent. & illud tandem mihi, opinor, ſucceſsiſſe fæliciter, quod duodecim ante annos deſideraueram: ijs etiam, quibus deuincior, Mechanicorum ſtudiorum obligationibus oportunum. ſuper qua mea opinione, Vir Excellentiſsime, hiſce lucubrationibus perlectis; & quatenus oportuerit ad correctionem notatis: tuam ſinceram enixè rogans, poſtulo, & expecto ſententiam. Vale.

Tabula Formoſa.

FO.u.
FO.a. FO.r.
FO.a2. FO.ar. FO.r2.
FO.a3. FO.a2r. FO.ar2. FO.r3.
FO.a4. FO.a3r. FO.a2r2. FO.ar3. FO.r4.

Tabula Subquadraturarum.

FO.u.
FO.a. FO.r.
FO.a2. FO.2ar. FO.r2.
FO.a3. FO.3a2r. FO.3ar2. FO.r3.
FO.a4. FO.4a3r. FO.6a2r2. FO.4ar3. FO.r4.

Tabula Quadraturarum.

FO.u.
FO.2a. FO.2r.
FO.3a2. FO.6ar. FO.3r2.
FO.4a3. FO.12a2r. FO.12ar2. FO.4r3.
FO.5a4. FO.20a3r. FO.30a2r2. FO.20ar3. FO.5r4

GEO-

GEOMETRIÆ SPECIOSÆ

ELEMENTVM SEXTVM.

DEFINITIONES.

1 ASſumatur inter lineas, vna quælibet quantitas; quæ, Rationalis, dicetur.

2 Et exponatur quædam recta linea, rationali æqualis; quæ dicetur, Tota:

3. Sitque data poſitione; quæ dicetur, Baſis.

4. Eiuſqne alterum extremorum punctorum, dicetur, Finis abſciſſarum.

5. Alterum, Finis reſiduarum.

6. Et ab vnoquoque puncto in baſi ſumpto, vſque ad finem abſciſſarum, quatenus ipſa baſis extenditur, quantitas dicetur Abſciſſa.

7. Ideoque tota dicetur etiam, Maxima abſciſſarum.

8. Item ab vnoquoque puncto in baſi ſumpto, vſque ad finem reſiduarum, quatenus baſis extenditur, quantitas dicetur Reſidua.

9. Ideoque tota dicetur etiam, Maxima reſiduarum.

10. Super baſi deſcribatur quadratum: & ab vno quolibet puncto in baſi ſumpto, recta ducatur, vſque ad oppoſitum latus, reliquis lateribus quadrati parallela: quæ dicetur, Ordinata in quadrato.

11. Quæ cum ſit æqualis rationali, & totę; dicetur Rationalis, & Tota, & Maxima abſciſſarum, & Maxima reſiduarum.

12. Et quadratum, per ſuas ordinatas extenſum, dicetur, Forma omnes rationales, & Forma omnes totæ. & ſignificabitur characteribus *FO.u*, & *FO.t*.

13. Immò quoniam tota eſt æqualis rationali, & reliquæ omnes poteſtates totę, ſunt inter ſe, & rationali æquales: ordinata in quadrato dicetur etiam, Tota ſecunda, Tota tertia, Tota quarta, & deinceps.

14. Et quadratum, dicetur, Forma omnes totæ ſecundæ, Forma omnes totæ tertiæ, Forma omnes totæ quartę. aptiſque ſignificabitur characteribus, *FO.t2*, *FO.t3*, *FO.t4*. & ſic deinceps.

15. A fine abſciſſarum ducta diameter quadrati, facit ſemiquadratum triangulum: cuius ab vnoquolibet puncto in baſi ſumpto recta ducatur, vſque ad prædictam diametrum, alteri lateri parallela, quæ dicetur, Ordinata in triangulo.

16. Quæ cum ſit æqualis abſciſſæ, dicetur, Abſciſſa.

17. Ipſumque triangulum per ſuas ordinatas extenſum, dicetur, Forma omnes abſciſſæ. & ſignificabitur charactere, *FO.a*.

18. Si-

18. Similiter à fine reſiduarum ducta diameter quadrati, facit ſemiquadratum triangulum: cuius vnaquęlibet ordinata, cum ſit æqualis reſiduæ, dicetur Reſidua.

19. Et per ordinatas reſiduas extenſum triangulum, dicetur, Forma omnes reſiduæ. & ſignificabitur charactere, *FO.r.*

20. Si ſuper baſi concipiatur figura extenſa non niſi per ordinatas in quadrato: ſed in qua, vnaquælibet ordinata, eſt abſciſſa ſecunda, dicetur, Forma omnes abſciſſæ ſecundæ. & ſignificabitur charactere *FO.a2.*

21. Item, in qua, vnaquælibet ordinata, eſt vniprima, dicetur, Forma omnes vniprimæ. & ſignificabitur charactere, *FO.ar.*

22. Et in qua, vnaquælibet ordinata, eſt reſidua ſecunda, dicetur Forma omnes reſiduæ ſecundæ. & ſignificabitur charactere, *FO.r2.*

23. Et generaliter, ſi ſuper baſi concipiatur figura, extenſa non niſi per ordinatas in quadrato: & in qua, vnaquęlibet ordinata, eſt aſſumpta quædam in tabula proportionalium: dicetur, Forma omnes tales proportionales. aptoque ſignificabitur charactere. vt Forma omnes abſciſſæ tertiæ, *FO.a3*: Forma omnes biprimę, *FO.a2r*: Forma omnes vniſecundæ, *FO.ar2*: Forma omnes reſiduæ tertiæ, *FO.r3*. & ſic deinceps.

24. Itaque ad inſtar tabulæ proportionalium, & ſpecierum, alia tabula ordinabitur formarum, quæ dicetur, Formoſa.

25. Quod ſi vna quælibet ordinata in forma, eſt aſſumpta quædam in tabula nominum: dicetur, Forma omnes totuplæ tales proportionales, aptoque ſignificabitur charactere. vt, Forma omnes duplæ vniprimæ, *FO.2ar*: Forma omnes triplæ biprimæ, *FO.3a2r*: Forma omnes triplæ vniſecundæ, *FO.3ar2*. & ſic deinceps.

26. Ideoque ad inſtar tabulæ nominum, & ſubquadratricum, alia tabula ordinabitur, quæ dicetur, Tabula ſubquadraturarum.

27. In qua digeſtæ formæ, dicentur, Subquadraturæ.

28. Item ad inſtar tabulæ quadratricum, alia tabula ordinabitur, quæ dicetur, Tabula Quadraturarum.

29. In qua digeſtæ formæ, dicentur, Quadraturæ.

30. Denique ſi vnaquælibt ordinata, in forma, eſt aſſumptæ proportionalis multipla, vel ſubmultipla, vel multiplæ ſubmultipla: dicetur, Forma omnes totuplæ] tales proportionales, vel ſubtotuplæ, vel totuplarum ſubtotuplæ. aptiſque ſignificabitur characteribus. vt Forma omnes quintuplæ bitertiæ, *FO.5a2r3*: & Forma omnes biprimę ſubtriplæ, *FO.a2r(3)*: & Forma omnes quadruplæ triquartæ ſubſeptulæ, *FO.4a3r4(7)*. & ſic deinceps.

31. Si baſis diuiſa fuerit in partes æquales; ductæque fuerint per extrema & media diuiſionum puncta parallelæ ordinatæ in forma; & ſuper partibus baſis æqualibus, inter parallelas completa fuerint parallelogramma maxima intra formam iacentia: figura ex parallelogrammis compoſita, dicetur, Inſcripta formæ.

32. Quod

32. Quod ſi completa fuerint parallelogramma minima formam includentia: figura ex parallelogrammis compoſita, dicetur, Circumſcripta formæ.

33. Figura vero ex tot parallelogrammis, quot ſunt ordinatæ per puncta diuiſionum, & ad ipſas ordinatas iacentibus compoſita, dicetur, Adſcripta formę.

34. Specioſa, & Formoſa tabulis congruentibus, Maſſæ, & Formæ, quarum in vtriſque ſunt eędem appellationes, & ijdem characteres, dicentur inuicem Homonymę.

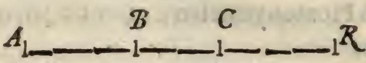
35. Item Homonymarum æquemultiplices, dicentur Homonymæ.

36. Ideoque etiam in duabus ſubquadratricum, & ſubquadraturarum, aut quadratricum, & quadraturarum tabulis, Maſſæ, & Formæ, dicentur Homonymę.

Theor. 1. *Prop.* 1.

TAbulæ formoſæ primi lateris, in tertia, quarta, & reliquis deinceps formis, in ſingulis ordinatæ, pro maioribus abſciſſis, ſunt maiores; & pro maxima abſciſſarum, eſt maxima, & ipſi baſi æqualis: item vltimi lateris in formis, pro maioribus reſiduis, ſunt maiores; & pro maxima reſiduarum, eſt maxima, & ipſi baſi æqualis.

Hypoth.



Eſto baſis *AR*: in qua finis abſciſſarum, *A*; finis reſiduarum, *R*. & ſint abſciſſæ, *AB* minor, *AC* maior, *AR* maxima; & reſiduæ, *RC* minor, *AB* maior, *RA* maxima: & eſto in primo latere tabulæ formoſæ, tertia *FO.a2*; & in vltimo, tertia *FO.r2*.

Dico in *FO.a2*, ordinatam per *C*, maiorem eſſe ordinata per *B*: & per *R*, maximam eſſe ordinatarum, & ęqualem ipſi *AR*.

Item in *FO.r2*, ordinatam per *B*, maiorem eſſe ordinata per *C*: & per *A*, maximam eſſe ordinatarum, & æqualem ipſi *RA*.

Demonſtr.

Baſis *RA*, ad ordinatam per *B*, duplicatam
def.10b habet rationem eius, quàm habet ad *AB*: & ad ordinatam per *C*, duplicatam eius, quàm habet ad

AC:

AC: & ad ordinatam per *R*, duplicatam æqualitatis, quàm habet ad *AR*. Sed *RA* ad *AB*, maior eſt, quàm vt ad *AC*: & ad *AC*, maior, quàm
4. 3. vt æqualis ad *AR*. Ergo ad ordinatam per *B*, maior eſt, quàm vt ad ordinatam per *C*: & ad ordinatam per *C*, maior, quàm vt ad ordinatam per *R*. Ergo ordinata per *B*, minor eſt, quàm quæ per *C*: & vtralibet per *B*, & per *C*, minor, quàm quæ per *R*: & ordinata per *R*, eſt maxima; ad quàm *RA* duplicatam habet rationem æqualitatis, nempe eamdem habet æqualitatis rationem: ergo per *R* ordinata, eſt ipſi *AR* æqualis. Quæ &c.

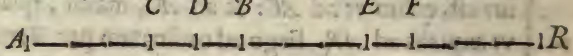
Simili prorſus demonſtratione oſtendetur, quòd in *FO*.r2, ordinata per *B*, maior eſt, quàm quæ per *C*: & vtralibet per *B*, & per *C*, minor, quàm quæ per *A*: & per *A* ordinata eſt maxima, & ipſi *AR* æqualis. Quę &c. Quare &c.

Theor. 2. Prop. 2.

IN ſingulis formoſæ tabulę, non primi, nec vltimi lateris formis, ordinatarum maxima, minor eſt, quàm tota: & facit abſciſſam, & reſiduam, proportionales, vt numeri, à quibus ipſa forma denominatur: reliquarum verò ex vtralibet parte, propior maximę remotiore maior eſt.

Hy-

Hypoth.



Eſto baſis *AR*; in qua, finis abſciſſarum, *A*; finis reſiduarum *R*: & eſto in tabula formoſa, non in primo, nec in vltimo latere, forma omnes bitertiæ, quàm denominant numeri 2, 3, cuius character, *FO.a2r3*. & diuidatur *AR* in *B*, vt abſciſſa *AB*, ad reſiduam *BR* ſit proportionalis, ſicut 2 ad 3: ſumanturque aliæ abſciſſæ minores, quàm *BA*, nempe *DA*, *CA*: & aliæ reſiduæ minores, quàm *BR*, nempe *ER*, *FR*.

Dico in *FO.a2r3*, ordinatam per *B* minorem eſſe, quàm *AR*; & ordinatarum eſſe maximam: & ordinatam per *D*, maiorem eſſe, quàm quæ per *C*: & ordinatam per *E*, maiorem, quàm quæ per *F*.

Demonſtr.

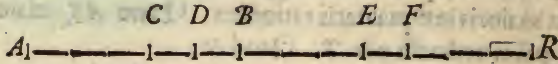
6. p. Rationalis *u*, ad *a2r3*, rationem habet compo-
def. 8. p. ſitam ex rationibus, *u* ad *a2*, & *u* ad *r3*: ideſt compoſitam ex duplicata *u* ad *a*, & ex triplicata *u* ad *r*. Eſt autem *AR* ad *AB*, vt *u* ad *a*: & *AR* ad *BR*, vt *u* ad *r*: & ad ordinatam per *B*, eſt vt *u* ad *a2r3*. Ergo *AR* ad ordinatam per *B*, habet rationem compoſitam ex rationibus, duplicata *AR* ad *AB*, atque triplicata *AR* ad *RB*. Sed *AR* ad *AB*, & *AR* ad *RB*, ſunt maioris inæqualitatis

litatis

tatis rationes, quæ tùm multiplicatæ, tùm compoſitæ, faciunt maioris inæqualitatis rationem. Quare *AR* maior eſt, quàm ordinata per *B*. Quod &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur, quod ordinata per *D* ad *AR*, habet rationem compoſitam ex duplicata *AD* ad *AR*, & ex triplicata
p. p. *DR* ad *AR*. Ergo ex æquali, ordinata per *D* ad ordinatam per *B*, rationem habet compoſitam ex duplicata *DA* ad *AB*, & ex triplicata *DR* ad
def. 5. 5. *RB*. Sunt autem *DA*, *AB*, *BR*, *RD*, quatuor arithmeticè diſpoſitæ, quarum ſecunda *AB* ad
105. 5. tertiam *BR* eſt vt 2 ad 3. Ergo duplicata ratio *DA* ad *AB* minor eſt, quàm triplicata *BR* ad
3. p. *RD*. Habet autem ſecunda poteſtas *DA* ad ſecundam *AB* duplicatam rationem eius, quàm habet *DA* ad *AB*: & tertia poteſtas *BR* ad tertiam *RD* triplicatam *BR* ad *RD*. Ergo ſecunda poteſtas *DA* ad ſecundam *AB* minor eſt, quàm vt
91. 5. tertia poteſtas *BR* ad tertiam *RD*: ergo productus ſub ſecunda poteſtate *AD*, & ſub tertia *DR*, minor eſt producto, ſub ſecunda *AB*, & ſub tertia
8. 5. *BR*. Sed productus ſub ſecunda poteſtate *AD*, & ſub tertia *DR*, ad productum ſub ſecunda *AB*, & ſub tertia *BR*, compoſitam habet ex rationibus ſecundæ poteſtatis *AD* ad ſecundam *AB*, & tertiæ *DR* ad tertiam *BR*: nempe compoſitam ex duplicata *AD* ad *AB*, & triplicata *DR* ad

RB:



RB: nempe eamdem quàm ordinata per *D* ad ordinatam per *B*. Ergo ordinata per *D*, minor eſt quàm ordinata per *B*. Similiter oſtendetur, quòd & ordinatæ per *E*, per *C*, per *F*, ſingulæ ſunt minores, quàm ordinata per *B*. Ergo ordinata per *B* eſt maxima. Quod &c.

Simili prorſus demonſtratione oſtendetur, quod ordinata per *C* ad ordinatam per *D*, eſt vt productus ſub ſecunda poteſtate *AC*, & ſub tertia *CR*, ad productum ſub ſecunda *AD*, & ſub tertia *DR*: & quod rationem habet compoſitam ex rationibus, duplicata *CA* ad *AD*, & triplicata *CR* ad *RD*. Sunt autem *DA*, *AC*, *CR*, *RD*, quatuor arithmeticè diſpoſitæ quarum *DA* maior eſt, quàm *AC*: & ſunt duo numeri 2 ad 3, vt *AB* ad *BR*, maiorem ſcilicet rationem habentes, quàm
107. 5. *AD* ad *DR*. Ergo maior eſt *DA* ad *AC* dupli-
2. 3. cata ratio, quàm *CR* ad *RD* triplicata: & è conuerſo minor eſt *CA* ad *AD* duplicata, quàm
3. p. *DR* ad *RC* triplicata: & minor eſt ſecunda poteſtas *CA* ad ſecundam *AD*, quàm vt poteſtas ter-
91. 5. tia *DR* ad tertiam *RC*: & minor eſt productus ſub ſecunda poteſtate *AC*, & ſub tertia *CR*, quàm ſub ſecunda poteſtate *AD*, & ſub tertia *DR*: &

minor

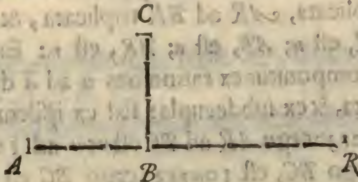
minor eſt ordinata per *C*, quàm ordinata per *D*. Similiter oſtendetur, quòd ordinata per *F*, minor eſt, quàm ordinata per *E*. Quod &c.

Quare &c.

Probl. 1. Prop. 3.

FOrmæ propoſitæ, in data baſi, per datum punctum, ordinatam inuenire.

Hypoth.



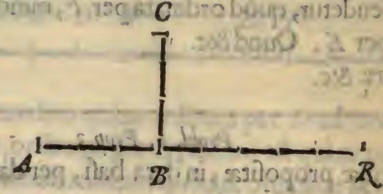
Eſto propoſita *FO*.1*o a*2*r*3, ſuper data baſi *AR*, in qua datum punctum *B*.

Oportet per *B* ordinatam inuenire.

Conſtr.

Data *AR*, datiſque *AB*, *BR*, inueniatur recta *BC*, ad quàm *AR*, rationem habet compoſitam ex datis rationibus, *AR* ad *AB* duplicata, *AR* ad *BR* triplicata, & ex ratione ſubdecupla: & collocetur *BC* perpendiculariter ad *AR*.

Dico *BC*, eſſe ordinatam per *B*, in *FO*.1*o a*2*r*3.



Demonſtr.

Ratio *AR* ad *BC*, componitur ex rationibus *AR* ad *AB* duplicata, *AR* ad *BR* triplicata, & ex ſubdecupla: ſed *AR*, eſt *u*; *AB*, eſt *a*; *BR*, eſt *r*: Ergo *AR* ad *BC* ratio, componitur ex rationibus *u* ad *a* duplicata, *u* ad *r* triplicata, & ex ſubdecupla: ſed ex ijſdem componitur *u* ad 10*a*2*r*3: ergo *AR* ad *BC* eſt vt *u* ad 10*a*2*r*3: Sed *AR* eſt *u*: ergo *BC*, eſt 10*a*2*r*3: ergo *BC* eſt ordinata per *B*, in *FO*.10*a*2*r*3. Quod &c.

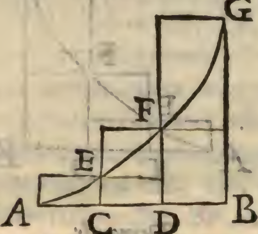
Quare &c.

Probl. 2. Prop. 4.

SVper data baſi propoſitæ formæ primi vel vltimi lateris, per datum numerum diuiſa in partes æquales, tres figuras ex parallelogrammis deſcribere, inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam: & oſtendere, quòd inſcripta & adſcripta ſunt æquales: & quòd circumſcripta excedit inſcriptam quantitate rectanguli ſub maxima ordinata, & ſub vna æqualium baſis partium.

Hy-

Hypoth.



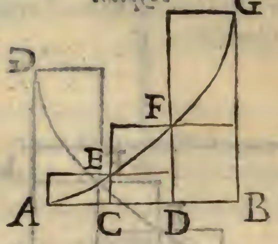
Eſto propoſitæ formæ data baſis *AB*, diuiſa in datas partes æquales *AC*, *CD*, *DB*.

Oportet deſcribere inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam.

Conſtr.

p. h. | Aſſumatur alterum extremorum *A*, *B*, nempe
3. h. | *B*, per quod ordinata eſt maxima: & inueniantur ordinatæ per data puncta *C*, *D*, *B*, rectæ *CE*, *DF*, *BG*: & compleantur parallelogramma *ED*, *FB*, *AE*, *CF*, *DG*.

Dico inſcriptam eſſe ex *DE*, *BF*: circumſcriptam, ex *AE*, *CF*, *DG*: adſcriptam, ex *AE*, *CF*, vel ex *DE*, *BF*: & adſcriptam inſcriptæ æqualem eſſe: & circumſcriptam excedere inſcriptam quantitate rectanguli *DG*.



Demonſtr.

p. h. Ordinatarum per omnia *BD* puncta, maxima eſt per *B*, minima per *D*: ergo parallelogrammorum inter ordinatas per *D*, & *B*, intra propoſitam formam iacentium, maximum eſt *BF*; & includentium formam, minimum eſt *DG*: excedit autem *DG*, ipſum *FB*, ſpatio *FG*. Similiter oſtendetur, parallelogrammum inter ordinatas per *C*, & *D*, infra propoſitam formam iacentium, maximum eſſe *DE*; & includentium formam, minimum eſſe *CF*: excedit autem *CF*, ipſum *DE*, ſpatio *EF*. Item quoniam *CE*, maxima eſt ordinatarum per omnia *AC* puncta; per *A* verò nulla eſt ordinata: ergo parallelogammorum, inter ordinatam per *C*, & eius parallelam per *A*, includentium formam, minimum eſt *AE*; nullum verò eſt, intra formam iacentium. Ergo inſcripta eſt,

p. h.

def. 31 b

ex

def.32b ex *DE*, *BF* compoſita: & circumſcripta, ex *AE*, *EF*, *DG* compoſita: & excedit circumſcripta inſcriptam ſpatio ex *AE*, *EF*, *FG* parallelogrammis compoſito. Sed ex *AE*, *EF*, *FG* compoſitum ſpatium parallelogrammo *DG* eſt æquale. ergo excedit circumſcripta inſcriptam quantitate *DG*. Et quoniam *CE*, *DF*, ſunt ordinatę per diuiſionum puncta *C*, *D* quibus totidem adiacent parallelogramma, vel *AE*, *CF*, vel *DE*, *BF*.
def.33b Ergo adſcripta eſt ex *DE*, *BF*, vel ex *AE*, *CF*. ſunt autem *AE*, *CF*, ipſis *DE*, *BF* æqualia, ex quibus componitur inſcripta. Ergo adſcripta eſt æqualis inſcriptæ. Quæ &c.

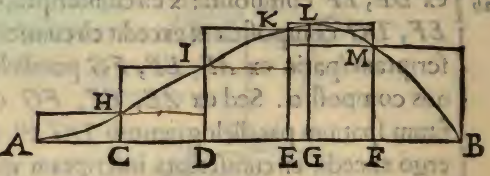
Quare &c.

Probl. 3. Prop. 5.

SVper data baſi propoſitæ formæ non primi neque vltimi lateris, per datum numerum diuiſa in partes ęquales; tres figuras ex parallelogrammis deſcribere, inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam: & oſtendere, quod circumſcripta excedit adſcriptam, quantitate rectanguli ſub maxima ordinatarum, & ſub vna æqualium baſis partium: & quod adſcripta excedit inſcriptam, non maiori quantitate.

Hypoth.

Eſto propoſitæ formæ data baſis *AB*, diuiſa in datas partes æquales *AC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FB*: & eſto *A*, finis abſciſſarum; & *B*, finis reſiduarum. Opor-



Oportet deſcribere inſcriptam, circumſcriptam, & adſcriptam.

Conſtr.

Aſſumantur numeri denominantes formam propoſitam, ſecundum quos diuidatur *AB* in partes proportionales in *G*, vt abſciſſa *AG*, ad reſiduam *GB*, ſic ſe habeat, ſicut denominantium numerorum prior ad poſteriorem. Conſtat per
2. *h*. *G* punctum, eſſe maximam ordinatam. Inue-
3. *h*. niantur per *C*, *D*, *E*, *G*, *F*, ordinatæ *CH*, *DI*, *EK*, *GL*, *FM*; & eſto *MF*, minor, quàm *EK*: & compleantur parallelogramma *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*, *HD*, *IE*, *EM*, *KF*.

Dico inſcriptam eſſe ex *HD*, *IE*, *EM*: circumſcriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*: adſcriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel ex *HD*, *IE*, *KF*, *MB*: & circumſcriptam excedere adſcriptam, quantitate rectanguli *ELF*: & adſcriptam excedere inſcriptam non maiori, quàm rectanguli *ELF* quantitate.

De-

Demonſtr.

2. *h.* Ordinatarum per omnia *BF* puncta, maxima eſt per *F*, nulla per *B*: ergo inter ordinatam per *F*, & parallelam per *B*, minimum parallelogram-
def.32b morum includentium formam eſt *MB*, ideoque ad circumſcriptam pertinens figuram: nullum verò eſt intra formam iacentium. Item ordinatarum per omnia *EF* puncta maxima eſt per *G*; & per *F*, minor, quàm quæ per *E*, eſt minima: & inter ordinatas *EK*, *FM* minimum parallelogrammorum includentium formam, eſt *ELF*, & intra formam iacentium maximum *EM*; ideoque ad circumſcriptam pertinet *ELF*; ad inſcriptam ve-
def.31b rò *EM*. Similiter oſtendetur, quod *DK*, *CI*, *AH* pertinent ad circumſcriptam; & *HD*, *IE* ad inſcriptam. Quare inſcripta eſt ex *HD*, *IE*, *EM*: & circumſcripta *AH*, *CI*, *DK*, *ELF*, *MB*. Et quoniam *CH*, *DI*, *EK*, *FM* ſunt ordinatæ, quibus adiacent parallelogramma *AH*, *CI*, *DK*, *EM*,
def.38h vel *HD*, *IE*, *KF*, *MB*: manifeſtum eſt adſcriptam ex *AH*, *CI*, *DK*, *EM*, vel ex *HD*, *IE*, *KF*, *MB* compoſitam eſſe. Excedit autem circumſcripta adſcriptam ſpatijs, *AH*, *HI*, *IK*, & exceſſu *ELF*, ſupra *KF*; vel ſpatijs *KLM*, *MB*: quæ vtralibet ſunt æqualia vni rectangulo *ELF*: excedit ergo circumſcripta adſcriptam, quantitate rectanguli *ELF*. Adſcripta vero excedit inſcriptam

ſpa-

ſpatijs *AH*, *HI*, *IK*; vel ſpatijs *KM*, *MB*: quæ vtralibet non maiora ſunt rectangulo *ELF*: excedit ergo adſcripta inſcriptam, non maiori quantitate, quàm ſit *ELF*. Quę &c.

Quare &c.

Probl. 4. Prop. 6.

INuenire numerum, per quem propoſitæ formæ datæ baſis diuidatur, vt circumſcripta, & inſcripta ſint propiores æqualitati, quàm in data ratione inæqualitatis.

Hypoth.

Eſto data baſis *B*, dataque ratio maioris inæqualitatis *c* ad *d*.

Oportet numerum inuenire, per quem cum diuiſa fuerit *B*, & figuræ circumſcripta & inſcripta deſcriptæ fuerint, circumſcripta ad inſcriptam, minor ſit, quàm vt *c* ad *d*.

Conſtr.

Aſſumatur quilibet numerus, per quem diuidatur *B*: & inſcripta deſcribatur figura *E*: & inueniatur quantitas *F*, ad quàm *E*, maior eſt,
2. *b.* quàm vt *c* ad *c*---*d*. Aſſignetur etiam, in ipſa *B*,
3. *b.* punctum: per quod maxima ordinatarum inueniatur *G*: & ad *G* applicetur quantitas *F*, vt fiat latitudo *H*: & ſumatur ipſius *H* multiplex *L*, maior quàm dupla *B*: & quotuplex eſt *L* ad *H*, totus numerus eſto *M*.

(5. *b.* in margin beside "datur *B*")

Dico *M*, eſſe numerum, per quem, cum diuiſa fuerit *B*; & figuræ circumſcripta, & inſcripta, fuerint deſcriptæ:

cir-

circumſcripta ad inſcriptam minor eſt, quàm vt *c* ad *d*.

Præpar.

5. *h.* Quotus eſt *M*, tota pars ipſius *B* accipiatur *N*. & diuiſa baſi per numerum *M*, ſit inſcripta figura *Q*, circumſcripta *R*, adſcripta *S*.

Demonſtr.

2. *p.* Quoniam *B* ad *N*; eſt vt *M* ad vnitatem, vel vt *L* ad *H*: permutando *B* ad *L*, eſt vt *N* ad
p. p. *H*: & 2*B* ad *L*, vt 2*N* ad *H*. Sed 2*B*, minor eſt, quàm *L*: ergo 2*N*, minor eſt, quàm *H*: ergo 2*GN* rectangulum, minus eſt rectangulo *GH*. ſed rectangulum *GH*, eſt æquale ipſi ſpatio *F*: ergo 2*GN*, minus eſt, quàm *F*. Et eſt *E* ad 2*GN*, ratio maior, quàm *E* ad *F*. Sed *E* ad *F* ratio, maior eſt, quàm *c* ad *c*---*d*: ergo *E* ad 2*GN* ratio, maior eſt, quàm *c* ad *c*---*d*. Eſt autem *R*, maior, quàm *E*: ergo *R* ad 2*GN* ratio, maior eſt,
5. *h.* quàm *c* ad *c*---*d*. Eſt autem *R*---*S*, ęqualis ipſi *GN*: & *S*---*Q*, non maior eſt, quàm 2*GN*: ergo *R* ad *R*---*Q*, maior eſt, quàm *c* ad *c*---*d*:
3. 3. ergo, per conuerſionem rationis, *R* ad *Q*, minor eſt, quàm vt *c* ad *d*. Ergo *M* eſt numerus per quem &c. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 3. Prop. 7.

ADſcripta, & forma, ſunt quaſi æquales.

Demonſtr.

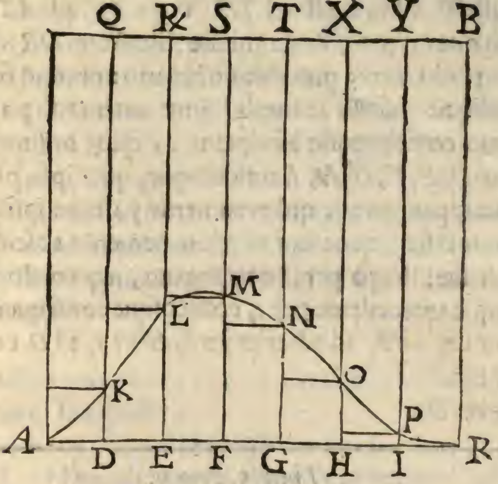
Nam data qualibet inæqualitatis ratione, poſ-
6. h. ſunt inueniri, circumſcripta formæ, & inſcripta,
5. h. propiores ęqualitati: eſt autem vtralibet adſcripta, & forma, minor, quàm circumſcripta, & maior,
67. 5. quàm inſcripta: ergo poteſt inueniri adſcripta ad formam propior ęqualitati, quàm in data qualibet
def. 3. 3. inæqualitatis ratione. Quare adſcripta, & forma, ſunt quaſi æquales.

Theor. 4. Prop. 8.

ADſcripta cuiuſque formæ, ad formam in vertice formoſæ tabulæ, eſt vt à radice numerò partium baſis, maſſa homonyma, ad totam vnitate plus ordinatã, quàm ſit baſis tabulæ ſpecioſæ, ad quam pertinet maſſa.

Hypoth.

Sunto duæ formæ, vna in vertice formoſæ
def. 12 b. *FO.u*, quæ eſt quadratum *AB*; altera *FO.*1 0*a*2*r*3, ſuper eadem baſi *AR*: in qua finis abſciſſarum *A*; finis reſiduarum *R*. Et eſto *AR* diuiſa in partes æquales, mediãtibus pũctis *D, E, F, G, H, I*: per quæ ordinatæ ſint, in altera forma, rectæ *DK, EL, FM, GN, HO, IP*; & in quadrato, ſint *DQ*, *E℞*, *FS*, *GT*, *HX*, *IY*. & ſint *AK*, *DL*, *EM*, *FN*, *GO*, *HP* parallelogramma, ex quibus componitur adſcripta, quæ vocetur *S*: & *AQ*, *D℞*, *ES*, *FT*, *GX*, *HY*, *IB* parallelogramma æqualia, in quę diuiditur



uiditur quadratum *AB*. Aſſumatur etiam numerus *t*, partium æqualium ipſius *AR*: & à radice *t*, maſſa *O.10a2r3*, quæ ad quintam baſim pertinet ſpecioſæ tabulæ: ſumaturque ab eadem radice *t*, tota ſexta *t6*.

Dico *AB* ad *S*, eſſe vt *t6* ad *O.10a2r3*, à radice *t*.

Demonſtr.

Quoniam *AR* ad *DK*, rationem habet compoſitam, ex duplicata *AR* ad *AD*, & ex triplicata *AR* ad *RD*, & ex ſubdecupla: videlicet pro abſciſſa vnitate *a*, compoſitam ex *t2* ad *a2*, & ex *t3* ad *r3*, & ex ſubdecupla: ideſt,

eamdem, quàm *t5* ad *10a2r3*, pro abſciſſa vnitate. ſed *AQ* ad *AK*, eſt vt *AR* ad *DK*: ergo *AQ* ad *AK*, eſt vt *t5* ad *10a2r3*, pro abſciſſa vnitate. Similiter *DR* ad *DL*, eſt vt *t5* ad *10a2r3* pro abſciſſo binario: necnon ſimiliter pro reliquis abſciſſis numeris. Sunt autem tot parallelogramma componentia aſcriptam *S*, quot ordinatæ per puncta *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*; totidemque, quot ipſa puncta: & vnitate pauciores, quàm numerus partium ipſius *AR*; nempe totidem, quot ſunt eiuſdem numeri *t* abſciſſiones, & abſciſſæ. Ergo per homologiam, æquemultiplicato vtrimque antecedente per *t*, collectiſque conſequentibus, quadratum *AB*, ad adſcriptam *S*, eſt vt *t*, ad *O.10a2r3*. Quod &c.

Quare &c.

Theor. 5. Prop. 9.

FOrma omnes multiplæ, ad formam omnes ſimplas eaſdem proportionales, ſuper eadem baſi iacentem, eſt æquemultipla.

Hypoth.

Eſto *A* forma omnes duplæ: & eſto *B* forma omnes ſimplæ eædem proportionales, ſuper communi baſi iacentes.

Dico *A* ad *B* duplam eſſe.

Demonſtr.

Diuiſa enim communi baſi, per quemlibet numerum, in partes æquales, ordinatę per puncta di-
def. 30 b

uiſio-

uiſionum in *A*, duplæ ſunt ordinatarum per eadem puncta in *B*, ſingulæ ſingularum: & adiacentia parallelogramma, quæ adſcriptas componunt, dupla ſunt ſingula ſingulorum; & ſimul omnia ſi-
def.33b mul omnium: & adſcripta *A*, adſcriptæ *B* eſt du-
7. b. pla: ſed adſcripta *B* quaſi eſt ęqualis ad ſuam for-
31. 3. mam *B*: ergo adſcripta *A*, quaſi eſt dupla for-
7. b. mæ *B*: ſed forma *A* quaſi eſt æqualis adſcriptæ *A*: & ſunt formæ *A*, *B*, quantitates determinatę.
33. 3. Ergo *A* ad *B* eſt dupla. Quod &c. Quare &c.

Theor. 6. Prop. 10.

OMnes quadraturæ ſuper eadem baſi conſtitutæ, ſunt inter ſe æquales.

Demonſtr.

8. b. Nam adſcripta cuiuslibet quadraturæ, ad formam in vertice formoſæ tabulæ iacentem, eſt vt quadratrix homonyma, ad totam vnitate plus ordinatam, quàm in qua baſi eſt quadratrix in ſua ta-
18. 3. bula: ſed quadratrix ad huiuſmodi totam, quaſi eſt æqualis: ergo adſcripta quadraturæ, ad formam in vertice formoſę iacentem, quaſi eſt ęqua-
7. b. lis: ſed & ad ſuam quadraturam quaſi eſt æqualis:
33. 3. ergo quadratura ad formam in vertice formoſæ iacentem, eſt æqualis. Quare omnes quadraturæ, cum eidem determinatæ formæ ſint æquales, inter ſe ſunt æquales.

Theor.7. Prop. 11.

IN vna quaſque baſi tabulæ ſubquadraturarum, ſubquadraturæ ſunt æquales: & ſimul omnes, componunt quantitatem formæ, in vertice formoſæ tabulæ iacentis.

Demonſtr.

*def.*28*b* Nam in vnaquaque baſi tabulæ ſubquadraturarum, quadraturæ ſunt æquemultiplæ. Sed æquales, ipſæ ſunt inter ſe quadraturæ: ergo æquales etiam ſunt inter ſe ſubquadraturæ.

9. b.

10. b.

Deinde in vnaquaque baſi tabulæ ſubquadraturarum, quotupla eſt quadratura vna vnius, tot ſunt ſubquadraturæ: atque totupla eſt ſumma omnium ſubquadraturarum, ad vnam tantùm. quare ſumma omnium ſubquadraturarum, vni quadraturæ eſt æqualis: ſed vnaquælibet quadratura æqualis eſt formæ in vertice formoſæ tabulæ iacenti. Quare in vnaquaque baſi tabulæ ſubquadraturarum, ſumma omnium, æqualis eſt vni formæ, in vertice formoſæ tabulæ iacenti.

10. b.

Porrò in Tabula Formoſa, in ipſius formis; præter ea, quæ in epiſtola ad Excellentiſsimum Caſsinum commemoraui ex meo libello Nouarum Quadraturarum alia inueni duo, quæ hic pro coronide recenſebo: aliàs publicanda cum demonſtratione, ſi Deus otium, & vlteriorem fortunam conceſſerit.

Vnum de mixtilineis angulis, & de cornibus formarum; & de angulorum quantitatibus, videlicet.

Sc-

Secundæ baſis ſecunda & penultima forma, eſt binangula, cuius angulorum ſinus rectus duplus verſi. tertiæ verò, & quartę, ac reliquarum deinceps omnium baſium formæ, prima & vltima, ſecunda & penultima, ſunt vnicornes, & vnangulæ; quarum ſinus rectus angulorum, ad verſum totuplus eſt, quotus eſt ordo baſis: in tertia, triplus; in quarta, quadruplus; in quinta quintuplus, & ſic deinceps. reliquæ demum formæ omnes, ſunt bicornes.

Alterū de centris grauitatum bipartitum, cuius prima pars eſt.

Cuiuſque formæ in tabula formoſa, recta linea per centrum grauitatis ordinata, facit partes baſis reciprocè proportionales, abſciſſam ad reſiduam, ſicut eius ordinum numeri in ſua baſi à prima, & ab vltima. Exempli gratia. Formæ in quarta baſi, ſecundæ tritultimæ per centrum ordinata, facit partes baſis, abſciſſam ad reſiduam proportionales, vt 3 ad 2, ordo tritultimæ ad ordinem ſecundæ.

Secunda pars eſt. In vnaquaque forma, linea ex centro grauitatis ducta ordinatim ad baſim, à baſi, & centro finita, dicetur, Altitudo centralis. Itaque formarum in tabula formoſa, centrales altitudines habent reciprocam rationem compoſitam ex rationibus numerorum, qui quadraturas ex formis producunt; ex directa iacentium in ijſdem baſibus, & lateribus tabulæ quadraturarum, & ex conuerſa iacentium in baſibus duplordinatis, & in lateribus vnitate minùs, quàm duplordinatis. Exempli gratia. Centralis altitudo *FO.a4r2.* formæ in ſexta baſi tertiæ quintultimæ, ad centralem altitudinem *FO.a3r6*, formæ in nona baſi

baſi ſeptimæ quartultimæ, rationem habet compoſitam ex rationibus numerorum quadraturas producentium ex formis; ex ratione, inquam, 105, tertij quintultimi in ſexta baſi, ad 840, ſeptimum quartultimum in nona baſi; & ex ratione 352716, tredecimi ſeptimultimi in decima octaua baſi, ad 6435, quintum nonultimum in duodecima baſi.

Vel aliter. Altitudines centrales formarum in tabula formoſa iacentium, rationem habent compoſitam, tum ex ratione earumdem formarum conuerſa, tum etiam ex directa aliarum in eadem tabula in baſibus duplordinatis, & in lateribus vnitate minùs quàm duplordinatis. Exempli gratia. Centralis altitudo *FO.a4r2*, ad centralem *FO.a3r6*, rationem habet compoſitam, ex rationibus, *FO.a3r6*, ad *FO.a4r2*; & *FO.a8r4*, ad *FO a6r12*.

DEO GRATIAS.

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06360 9583

Digitized by Google